

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### Α΄ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.   | ΣΕΙΡΕΣ                                  |     |
| 1.1  | Η έννοια της σειράς .....               | 13  |
| 1.2  | Ορισμός αθροίσματος σειράς .....        | 14  |
| 1.3  | Σειρές με όρους μη αρνητικούς .....     | 20  |
| 1.4  | Το γινόμενο σειρών κατά Cauchy .....    | 30  |
|      | Ασκήσεις .....                          | 32  |
| 1.5  | Δυναμοσειρές .....                      | 35  |
| 1.6  | Μιγαδικές δυναμοσειρές .....            | 41  |
| 1.7  | Η δυναμοσειρά ως συνάρτησή .....        | 42  |
|      | Ασκήσεις .....                          | 44  |
| 2.   | ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ |     |
| 2.1  | Πρώτες έννοιες .....                    | 45  |
| 2.2  | Γραφική παράσταση .....                 | 47  |
| 2.3  | Περιορισμός και επέκταση .....          | 48  |
| 2.4  | Άλγεβρα συναρτήσεων .....               | 49  |
| 2.5  | Άλλες μορφές συναρτήσεων .....          | 50  |
| 2.6  | Σύνθεση συναρτήσεων .....               | 54  |
| 2.7  | Η αντίστροφη συνάρτηση .....            | 56  |
| 2.8  | Ειδικές μορφές συναρτήσεων .....        | 58  |
| 2.9  | Ιδιότητες .....                         | 68  |
| 2.10 | Μετατόπιση .....                        | 72  |
| 2.11 | Περιοδική επέκταση .....                | 75  |
|      | Ασκήσεις .....                          | 80  |
| 3.   | ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ           |     |
| 3.1  | Πλευρικά όρια .....                     | 87  |
| 3.2  | Ιδιότητες και άλγεβρα ορίων .....       | 97  |
| 3.3  | Αξιοσημείωτα όρια .....                 | 99  |
| 3.4  | Περί ασυμπτώτων .....                   | 105 |
|      | Ασκήσεις .....                          | 118 |
| 3.5  | Η συνέχεια των συναρτήσεων .....        | 120 |
| 3.6  | Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων ..... | 128 |

## Β΄ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.  | ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ  |     |
| 4.1 | Ορισμός παραγώγου .....  | 137 |
| 4.2 | Πλευρικές παράγωγοι .....  | 139 |
|     | Ασκήσεις .....   | 143 |
| 4.3 | Γεωμετρικές ερμηνείες .....  | 146 |
| 4.4 | Το διαφορικό .....   | 148 |
| 4.5 | Παράγωγοι απλών συναρτήσεων. Κανόνες παραγωγίσεως .....                        | 152 |
| 4.6 | Παράγωγοι και διαφορικά ανωτέρας τάξεως. Εφαρμογές .....                       | 183 |
|     | Ασκήσεις .....   | 190 |
| 5.  | ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ<br>ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ       |     |
| 5.1 | Τα τέσσερα πρώτα θεωρήματα .....   | 199 |
|     | Ασκήσεις .....   | 208 |
| 5.2 | Απροσδιόριστες μορφές. Αληθινές οριακές τιμές.<br>Κανόνας του l Hospital ..... | 210 |
|     | Ασκήσεις .....   | 218 |
| 5.3 | Τύπος και σειρά Taylor .....   | 219 |
|     | Ασκήσεις .....   | 230 |
| 5.4 | Μελέτη μονοτονίας συναρτήσεως .....  | 231 |
|     | Ασκήσεις .....   | 235 |
| 5.5 | Μέγιστα και ελάχιστα .....   | 236 |
| 5.6 | Κριτήρια ακροτάτων .....   | 238 |
| 5.7 | Κοίλα και κυρτά. Καμπές .....  | 250 |
|     | Ασκήσεις .....   | 258 |
| 5.8 | Μελέτη συναρτήσεων που εκφράζονται παραμετρικά                                 | 260 |
| 5.9 | Προβλήματα-Εφαρμογές .....   | 264 |
|     | Προβλήματα .....   | 298 |

## Γ΄ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 6.  | ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ                    |     |
| 6.1 | Το ορισμένο ολοκλήρωμα κατά Riemann ..... | 305 |

|                             |  |     |
|-----------------------------|--|-----|
| 6.2                         | Κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων .....                                      | 308 |
| 6.3                         | Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος .....                                  | 310 |
| 6.4                         | Γεωμετρικές ερμηνείες .....  | 314 |
| 6.5                         | Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού                               | 319 |
| 6.6                         | Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση ενός των<br>ορίων του .....              | 322 |
| 7. ΑΟΡΙΣΤΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ       |  |     |
| 7.1                         | Τα βασικά ολοκληρώματα .....   | 330 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 334 |
| 7.2                         | Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων .....   | 338 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 345 |
| 7.3                         | Ολοκληρώματα που προκύπτουν από το $\int \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} dx$ .. | 345 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 350 |
| 7.4                         | Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (ή κατά μέρη) ....                                | 351 |
| 7.5                         | Αξιοσημείωτα ολοκληρώματα .....  | 356 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 360 |
| 7.6                         | Μέθοδος αντικαταστάσεως .....  | 361 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 368 |
| 7.7                         | Ειδικές μορφές αντικαταστάσεως .....   | 369 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 373 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 387 |
| 7.8                         | Συμπληρωματικές προτάσεις .....  | 389 |
| 7.9                         | Μέση τιμή και μέση τετραγωνική τιμή .....                                    | 392 |
| 7.10                        | Ορισμένο ολοκλήρωμα με παράμετρο .....                                       | 394 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 399 |
| 7.11                        | Αναγωγικοί τύποι .....   | 400 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 404 |
| 8. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ |  |     |
| 8.1                         | Γενικευμένα πρώτου είδους .....  | 405 |
| 8.2                         | Γενικευμένα δευτέρου είδους .....  | 408 |
| 8.3                         | Κριτήρια συγκλίσεως .....  | 412 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 415 |
| 8.4                         | Γενικευμένα με παραμέτρους .....   | 416 |
|                             | Ασκήσεις .....   | 420 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 8.5  | Γενικευμένο ολοκλήρωμα διπλό .....                               | 421 |
|      | Ασκήσεις .....   | 423 |
| 8.6  | Συναρτήσεις Γάμμα και Βήττα .....                                | 424 |
|      | Ασκήσεις .....   | 433 |
|      |  |     |
| 9.   | ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ                            |     |
| 9.1  | Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών .....                                | 434 |
| 9.2  | Μήκος τόξου .....  | 443 |
|      | Ασκήσεις .....   | 448 |
| 9.3  | Εμβαδά και όγκοι στερεών εκ περιστροφής .....                    | 453 |
|      | Ασκήσεις .....   | 460 |
| 9.4  | Μάζα σύρματος .....  | 461 |
| 9.5  | Έργο δυνάμεως .....  | 463 |
| 9.6  | (Στατικές) Ροπές, κέντρα βάρους .....                            | 473 |
| 9.7  | Ροπές αδράνειας .....  | 500 |
|      | Προβλήματα .....   | 516 |
|      |  |     |
| 10.  | ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ                                     |     |
| 10.1 | Η ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών και οι συνέ-<br>πειές της ..... | 523 |
| 10.2 | Ολοκλήρωση με σειρές Taylor .....                                | 527 |
|      | Ασκήσεις .....   | 530 |
| 10.3 | Προσεγγιστικές μέθοδοι για ορισμένο ολοκλήρωμα                   | 531 |
|      | (α) μέθοδος ορθογωνίων .....                                     | 531 |
|      | (β) μέθοδος τραπεζίων .....                                      | 535 |
|      | (γ) μέθοδος εφαπτομένων .....                                    | 538 |
|      | (δ) μέθοδος Simpson .....  | 539 |
|      | (ε) μέθοδος Lagrange .....                                       | 544 |
|      | (στ) Γραφική μέθοδος .....                                       | 546 |
|      | Πίνακας βασικών παραγωγίσεων και ολοκληρώσεων                    | 553 |
|      | Άλλα αξιοσημείωτα ολοκληρώματα .....                             | 556 |
|      | Παράρτημα .....  | 557 |
|      | Βιβλιογραφία .....   | 564 |
|      | Ευρετήριο όρων και εννοιών .....                                 | 565 |