

ΜΕΡΟΣ Α'  
ΣΥΝΗΘΕΙΣ  
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΡΩΣΕΙΣ

## Σελ.

## 2. Η ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΗ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

### 3. ΕΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

#### 4. ΕΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΤΑΞΕΩΣ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

|     |                                                                       |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 | Περιγραφή . . . . .                                                   | 91  |
| 4.2 | ΤΥΠΟΣ 9 : . . . . .                                                   | 91  |
| 4.3 | ΤΥΠΟΣ 10 : Διαφ. εξίσωση των D' Alembert-Lagrange . . . . .           | 98  |
| 4.4 | ΤΥΠΟΣ 11 : Δ.Ε. πού αναλύονται σέ γινόμενο . . . . .                  | 100 |
| 4.5 | ΤΥΠΟΣ 12 : Διαφ. εξίσωση Clairaut . . . . .                           | 101 |
| 4.6 | ΤΥΠΟΣ 13 : Δ.Ε. ανωτέρας τάξεως, πού ανάγονται<br>σε πρώτης . . . . . | 106 |

## 5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

|          |                   |                                             |     |
|----------|-------------------|---------------------------------------------|-----|
| Εφαρμογή | 1 <sup>η</sup> :  | Εξάχνωση . . . . .                          | 111 |
| "        | 2 <sup>η</sup> :  | Ένταση ακτινοβολίας . . . . .               | 113 |
| "        | 3 <sup>η</sup> :  | Χρονολόγηση με $C^{14}$ . . . . .           | 115 |
| "        | 4 <sup>η</sup> :  | Μεταβολή θερμοκρασίας . . . . .             | 117 |
| "        | 5 <sup>η</sup> :  | Διάλυμα . . . . .                           | 113 |
| "        | 6 <sup>η</sup> :  | Πτώση σώματος . . . . .                     | 120 |
| "        | 7 <sup>η</sup> :  | Ηλ. κύκλωμα με σταθερή τάση . . . . .       | 121 |
| "        | 8 <sup>η</sup> :  | Ηλ. κύκλωμα με εναλλασσόμενη τάση . . . . . | 124 |
| "        | 9 <sup>η</sup> :  | Διακοπή τάσεως . . . . .                    | 128 |
| "        | 10 <sup>η</sup> : | Συγκέντρωση διαλύματος . . . . .            | 131 |
| "        | 11 <sup>η</sup> : | Υπερηχητική πτήση . . . . .                 | 132 |
| "        | 12 <sup>η</sup> : | Πορεία πλοίου με άνεμο . . . . .            | 134 |
| "        | 13 <sup>η</sup> : | Διάδοση θερμότητας . . . . .                | 137 |
| "        | 14 <sup>η</sup> : | Πρώτη γεωμετρική εφαρμογή . . . . .         | 139 |
| "        | 15 <sup>η</sup> : | Δεύτερη γεωμετρική εφαρμογή . . . . .       | 140 |
|          |                   | ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ . . . . .                        | 141 |

## 6. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ. ΣΥΝΤΟΜΗ ΘΕΩΡΙΑ

|     |                                                         |     |
|-----|---------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 | Η γραμμική Δ.Ε. ανωτέρας τάξεως . . . . .               | 145 |
| 6.2 | Τελεστές παραγωγίσεως . . . . .                         | 146 |
| 6.3 | Ιδιότητες των πολυωνυμικών τελεστών . . . . .           | 148 |
| 6.4 | Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία συναρτήσεων . . . . . | 152 |
| 6.5 | Ο χώρος λύσεων της ομογενούς και γραμμικής Δ.Ε. . . . . | 153 |
| 6.6 | Ορίζουσα Wronsky . . . . .                              | 154 |
| 6.7 | Μελέτη τού χώρου V . . . . .                            | 155 |

## 7. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ . ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

|     |                                                                     |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 | Γραμμική και ομογενής Δ.Ε. με σταθερούς<br>συντελεστές . . . . .    | 161 |
| 7.2 | Γραμμική αλλά μη ομογενής Δ.Ε με σταθερούς<br>συντελεστές . . . . . | 170 |
| 7.3 | Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών . . . . .                        | 174 |
| 7.4 | Μέθοδος Lagrange ή αλλαγής τών σταθερών . . . . .                   | 185 |
| 7.5 | Μέθοδος με συνέλιξη . . . . .                                       | 191 |
| 7.6 | Η μιγαδική μέθοδος . . . . .                                        | 206 |

|      |                                                                            |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.7  | Η μιγαδική μέθοδος σέ ολοκληρωδιαφορικές<br>εξισώσεις . . . . .            | 213 |
| 7.8  | Παροδική καί μόνιμη κατάσταση . . . . .                                    | 217 |
| 7.9  | Άμεσος προσδιορισμός τής Γ.Λ. μέ τό<br>Exponential Shift Theorem . . . . . | 220 |
| 7.10 | Μέθοδος επιλύσεως με τόν αντίστροφο<br>τελεστή $P^{-1}(D)$ . . . . .       | 227 |

## 8. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ Δ.Ε. ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

|      |                                                       |     |
|------|-------------------------------------------------------|-----|
| 8.1  | Φαινόμενα ομαλής μεταβολής . . . . .                  | 241 |
| 8.2  | Το πρόβλημα βολής . . . . .                           | 247 |
| 8.3  | Ηλεκτρικό κύκλωμα V-L . . . . .                       | 251 |
| 8.4  | Κρεμαστή γέφυρα . . . . .                             | 254 |
| 8.5  | Φαινόμενα αρμονικής ταλάντωσης . . . . .              | 256 |
| 8.6  | Φαινόμενα αποσβεννύμενων κινήσεων . . . . .           | 268 |
| 8.7  | Φαινόμενα εξαναγκασμένης ταλάντωσης . . . . .         | 280 |
| 8.8  | Σύστημα χωρίς αντίσταση καί αρμονική είσοδο . . . . . | 288 |
| 8.9  | Σύστημα μέ αντίσταση καί αρμονική είσοδο . . . . .    | 288 |
| 8.10 | Τό πρόβλημα τής δοκού . . . . .                       | 293 |

## 9. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΑΗΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

|     |                                                            |     |
|-----|------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1 | Γενικότητες . . . . .                                      | 303 |
| 9.2 | Μέθοδος επιλύσεως μέ υποβιβασμό τάξεως . . . . .           | 305 |
| 9.3 | Μέθοδος Lagrange . . . . .                                 | 310 |
| 9.4 | Διαφορικές εξισώσεις Euler . . . . .                       | 312 |
| 9.5 | Διαφ. εξισώσεις Bessel, τάξεως $p = \frac{1}{2}$ . . . . . | 317 |
| 9.6 | Η διαφ. εξίσωση $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ . . . . .    | 318 |
| 9.7 | Τέλειες διαφορικές εξισώσεις . . . . .                     | 319 |
| 9.8 | Εξισώσεις πού ανάγονται σέ τέλειες . . . . .               | 324 |

## 10. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

|      |                                                         |     |
|------|---------------------------------------------------------|-----|
| 10.1 | Γενικότητες . . . . .                                   | 327 |
| 10.2 | Συστήματα κανονικής μορφής . . . . .                    | 329 |
| 10.3 | Επίλυση συστήματος μέ παραγώνιση καί απαλοιφή . . . . . | 330 |

## 11. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

|      |                                                                                    |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1 | Πρώτοι ορισμοί . . . . .                                                           | 339 |
| 11.2 | Σύντομη θεωρία . . . . .                                                           | 341 |
| 11.3 | Επίλυση κανονικού συστήματος<br>μέ παραγώνιση και απαλοιφή . . . . .               | 345 |
| 11.4 | Επίλυση κανονικού συστήματος<br>μέ τις ιδιοτιμές του πίνακα $A$ . . . . .          | 355 |
| 11.5 | Επίλυση κανονικού συστήματος<br>μέ διαγωνοποίηση του πίνακα $A$ . . . . .          | 379 |
| 11.6 | Επίλυση ομογενούς αλλά μη κανονικού<br>συστήματος μέ απαλοιφή . . . . .            | 387 |
| 11.7 | Επίλυση μη ομογενούς συστήματος<br>μέ απαλοιφή και κανόνα $Kramer$ . . . . .       | 394 |
| 1.8  | Επίλυση ομογενούς συστήματος<br>μέ αναγωγή του σε κανονική μορφή . . . . .         | 402 |
| 11.9 | Άμεση επίλυση ομογενούς συστήματος<br>μέ τις ιδιοτιμές του πίνακα $P(D)$ . . . . . | 408 |

## 12. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

|      |                                               |     |
|------|-----------------------------------------------|-----|
| 12.1 | Μετασχηματιστής . . . . .                     | 421 |
| 12.2 | Σύστημα ελατηρίων . . . . .                   | 425 |
|      | Εφαρμογή 1η (Ηλεκτρικό κύκλωμα) . . . . .     | 429 |
|      | Εφαρμογή 2η (κίνηση υλικού σημείου) . . . . . | 431 |
|      | Εφαρμογή 3η (κίνηση υλικού σημείου) . . . . . | 433 |

## 13. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

|      |                                                 |     |
|------|-------------------------------------------------|-----|
| 13.1 | Προκαταρκτικά . . . . .                         | 435 |
| 13.2 | Ορισμός μετασχηματισμού Laplace . . . . .       | 438 |
| 13.3 | Πρώτες ιδιότητες . . . . .                      | 443 |
| 13.4 | Μετασχηματισμένη παραγώγου . . . . .            | 451 |
| 13.5 | Μετασχηματισμένη ολοκληρώματος . . . . .        | 453 |
| 13.6 | Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace . . . . . | 456 |
| 13.7 | Αντιστροφή μέ συνέλιξη . . . . .                | 460 |
| 13.8 | Διαφορικές εξισώσεις και συστήματα . . . . .    | 466 |

## 14. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

|      |                                                                 |     |
|------|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 14.1 | Ομαλά καί ανώμαλα σημεία . . . . .                              | 481 |
| 14.2 | Λύση σέ ομαλό σημείο . . . . .                                  | 484 |
| 14.3 | Λύση σέ κανονικό ανώμαλο σημείο<br>Μέθοδος Frobenious . . . . . | 495 |
| 14.4 | Διαφορικές εξισώσεις Bessel . . . . .                           | 500 |
| 14.5 | Άλλες διαφορικές εξισώσεις τῆς Φυσικῆς . . . . .                | 513 |
|      | α) Δ.Ε. τοῦ Legendre . . . . .                                  | 513 |
|      | β) Δ.Ε. τοῦ Laguerre . . . . .                                  | 518 |
|      | γ) Δ.Ε. τοῦ Hermite . . . . .                                   | 521 |
|      | δ) Δ.Ε. τοῦ Chebyshev . . . . .                                 | 523 |
|      | ε) Δ.Ε. τοῦ Gauss (υπεργεωμετρική) . . . . .                    | 525 |
| 14.6 | Λύση συστήματος μέ σειρές . . . . .                             | 527 |

## 15. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

|       |                                                |     |
|-------|------------------------------------------------|-----|
| 15.1  | Γενικότητες . . . . .                          | 529 |
| 15.2  | Μέθοδος μέ σειρά Taylor . . . . .              | 530 |
| 15.3  | Η μέθοδος Taylor σε πρόγραμμα H/Y . . . . .    | 533 |
| 15.4  | Μέθοδος Euler . . . . .                        | 538 |
| 15.5  | Η μέθοδος Euler σέ πρόγραμμα H/Y . . . . .     | 541 |
| 15.6  | Μέθοδος Heun . . . . .                         | 543 |
| 15.7  | Η μέθοδος Heun σέ πρόγραμμα H/Y . . . . .      | 547 |
| 15.8  | Μέθοδοι Runge - Kutta . . . . .                | 550 |
| 15.9  | Μέθοδος Runge-Kutta σέ πρόγραμμα H/Y . . . . . | 556 |
| 15.10 | Αριθμητικές μέθοδοι στά συστήματα . . . . .    | 558 |

## 16. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

|      |                                                     |     |
|------|-----------------------------------------------------|-----|
| 16.1 | Γενικότητες . . . . .                               | 561 |
| 16.2 | Ιδιοτιμές καί ιδιοσυναρτήσεις . . . . .             | 567 |
| 16.3 | Προβλήματα Sturm-Liouville . . . . .                | 575 |
| 16.4 | Ιδιότητες τών προβλημάτων Sturm-Liouville . . . . . | 576 |
|      | Ασκήσεις . . . . .                                  | 580 |

**ΜΕΡΟΣ Β'**

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

**ΣΤΗΝ ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ**

**ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ**

**17. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΕΩΝ**  
**ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΛΥΣΕΩΣ**

|      |                                          |     |
|------|------------------------------------------|-----|
| 17.0 | Γενικότητες . . . . .                    | 583 |
| 17.1 | Θεώρημα PICARD-LINDELÖF . . . . .        | 584 |
| 17.2 | Συστήματα διαφορικών εξισώσεων . . . . . | 606 |
| 17.3 | Γενικό Θεώρημα PICARD-LINDELÖF . . . . . | 610 |
| 17.4 | Η γραμμική διαφορική εξίσωση . . . . .   | 615 |
| 17.5 | Η συνέχεια των λύσεων . . . . .          | 623 |
| 17.6 | Τροχιές και χώρος φάσεων . . . . .       | 628 |

**18. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ**

|      |                                                    |     |
|------|----------------------------------------------------|-----|
| 18.1 | Εισαγωγή . . . . .                                 | 635 |
| 18.2 | Η Ευστάθεια κατά LYAPUNOV . . . . .                | 637 |
| 18.3 | Σημεία ισορροπίας και Ευστάθεια . . . . .          | 646 |
| 18.4 | Κριτήρια για τις μορφές Ευστάθειας . . . . .       | 657 |
| 18.5 | Γεωμετρικές εικόνες στον χώρο των φάσεων . . . . . | 660 |
| 18.6 | Κριτήρια για τη μορφή των τροχιών . . . . .        | 670 |
| 18.7 | Συναρτήσεις LYAPUNOV . . . . .                     | 678 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ . . . . . | 679 |
|------------------------|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ . . . . . | 681 |
|---------------------|-----|

|                   |  |
|-------------------|--|
| ΠΙΝΑΚΕΣ . . . . . |  |
|-------------------|--|