

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

1.1 Συναρτήσεις και οι περιοχές ορισμού τους	17
1.2 Όρια και συνέχεια	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μερική Παραγωγήιση

2.1 Μερικές παράγωγοι	31
2.2 Γεωμετρική ερμηνεία	39
2.3 Προσανυξήσεις και διαφορικά	41
2.4 Παράγωγοι και διαφορικά σύνθετων συναρτήσεων	46
2.5 Παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων.....	54
2.6 Μετασχηματισμοί	70
2.7 Κατευθυνόμενη παράγωγος	74
2.8 Κλίση συναρτήσεων (Gradient)	84
2.9 Εφαπτόμενα επίπεδα και κάθετες γραμμές	91
2.10 Ακρότατα	96
2.11 Ακρότατα - Πολλαπλασιαστές του Lagrange	105

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πολλαπλά Ολοκληρώματα

3.1 Διπλά ολοκληρώματα	111
3.2 Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος	116
3.3 Εμβαδά και όγκοι	128
3.4 Διπλά ολοκληρώματα και πολικές συντεταγμένες	137
3.5 Μάζα, Ροπή, Αδράνεια	147
3.6 Εμβαδόν επιφάνειας	160
3.7 Τριπλό ολοκλήρωμα	169
3.8 Μάζα, Ροπή, Αδράνεια	183
3.9 Τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες	190

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

4.1 Καμπύλες και μήκος τόξου	203
4.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα α' είδους	208
4.3 Επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους	219
4.4 Εφαρμογές και παραδείγματα του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β' είδους	226
4.5 Θεώρημα του Green στο επίπεδο	238
4.6 Ανεξαρτησία του δρόμου ολοκλήρωσης	253

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

5.1 Επιφανειακά ολοκληρώματα α' είδους	271
--	-----

5.2 Εφαρμογές και παραδείγματα του επιφανειακού ολοκληρώματος α' είδους	278
5.3 Επιφανειακά ολοκληρώματα β' είδους	289
5.4 Απόκλιση και περιστροφή	297
5.5 Θεώρημα της απόκλισης	301
5.6 Θεώρημα του Stokes	314

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στοιχεία από την γεωμετρία του $\mathbb{R}^3$

Π.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις	327
Π.2 Διανύσματα στις τρεις διαστάσεις	332
Π.3 Γραφικές παραστάσεις	336
Π.4 Ευθείες γραμμές	339
Π.5 Επίπεδα	342
Π.6 Επιφάνειες δευτέρου βαθμού	350
Π.7 Πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες	358
Π.8 Καμπύλες στο χώρο	364
Πίνακας ολοκληρωμάτων	373

ΜΕΡΟΣ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης

1.1 Γενικά	385
1.2 Οικογένειες καμπυλών ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων	394
1.2.1 Εύρεση διαφορικής εξίσωσης από τη λύση της	394

1.2.2	Εύρεση της περιβάλλουσας οικογένειας καμπυλών	400
1.3	Γραμμικό στοιχείο και πεδίο διευθύνσεων μιας Δ.Ε. πρώτης τάξης και κανονικής μορφής	404
1.4	Ιδιάζουσα λύση Δ.Ε. πρώτης τάξης	407

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

2.1	Γενικά	413
2.2	Προσδιορισμός μιας μερικής λύσης από τη γενική λύση της Δ.Ε. Πρόβλημα των αρχικών και συνοριακών τιμών	414
2.3	Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές	416
2.4	Διαφορικές εξισώσεις που γίνονται χωριζόμενων μεταβλητών μετά από κατάλληλο μετασχηματισμό	422
2.4.1	Δ.Ε. της μορφής $y' = f(ax + by + \gamma)$ με $a \neq 0, b \neq 0$	422
2.4.2	Δ.Ε. της μορφής $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ή $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $y \neq 0, x \neq 0$ αντίστοιχα	424
2.4.3	Δ.Ε. της μορφής $x^2 y' = f(xy)$	425
2.4.4	Δ.Ε. της μορφής $yy' + f(x^2 \pm y^2)\sigma(x) \pm x = 0$	427
2.4.5	Δ.Ε. της μορφής $y' = ay^v + \beta x^{\frac{v}{1-v}}$, $x > 0, v \neq 1$	428
2.5	Ομογενείς Δ.Ε.	432
2.6	Δ.Ε. Αναγόμενες σε ομογενείς	438
2.7	Γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης	445
2.7.1	Ομογενής γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης	446
2.7.2	Πλήρης γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης	446
2.7.3	Γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές και σταθερό 2 ^ο μέλος	448
2.7.4	Γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης με σταθερούς	

συντελεστές	449
2.8 Δ.Ε. του Bernoulli	455
2.9 Δ.Ε. του Riccati	460
2.10 Πλήρεις ή ακριβείς Δ.Ε.	468
2.11 Δ.Ε. πρώτης τάξης και ανώτερου βαθμού	487
2.12 Η Δ.Ε. του Clairaut	497
2.13 Η Δ.Ε. του Lagrange	501
2.14 Επίλυση Δ.Ε. πρώτης τάξης και ανώτερου βαθμού πεπλεγμένης μορφής με μετασχηματισμούς	506
2.14.1 Γενικά	506
2.14.2 Μετασχηματισμός Legendre	506
2.14.3 Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες	510
2.14.4 Εναλλαγή του ρόλου των x και y	511
2.15 Εφαρμογές Δ.Ε. 1ης τάξης	514
2.15.1 Ισογώνιες τροχιές	514
2.15.2 Ορθογώνιες τροχιές	516
2.15.3 Ηλεκτρικά κυκλώματα	521
2.15.4 Πρόβλημα ψύξης	524
2.15.5 Πτώση των σωμάτων	526
2.16 Λυμένες ασκήσεις 2 ^{ου} κεφαλαίου	534

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης

3.1 Γενικά	547
3.2 Γραμμικές ομογενείς Δ.Ε. ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	552
3.3 Πλήρεις γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	559
3.4 Γραμμικές Δ.Ε. 2 ^{ης} τάξης με μεταβλητούς συντελεστές	582

3.5 Τελεστής παραγώγισης και γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης	588
3.5.1 Γενικά	588
3.5.2 Εφαρμογή των τελεστών στη λύση των Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές	597
3.5.3 Ειδικές μορφές γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές	613
3.5.4 Εφαρμογές των γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης	620

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ειδικές μορφές Δ.Ε. ανώτερης τάξης

4.1 Γενικά	631
4.2 Εξισώσεις της μορφής $y^{(v)} = f(x)$ (v - τάξης)	631
4.3 Εξισώσεις της μορφής $F(x, y^{(v)}) = 0$	636
4.4 Εξισώσεις της μορφής $F(x, y', y'', \dots, y^{(v)}) = 0$	639
4.5 Εξισώσεις της μορφής $F(y^{(v)}, y^{(v-1)}) = 0$	643
4.6 Εξισώσεις της μορφής $F(y^{(v)}, y^{(v-2)}) = 0$	647
4.7 Εξισώσεις της μορφής $F(y, y', y'', \dots, y^{(v)}) = 0$	649
4.8 Ομογενείς Δ.Ε. ανώτερης τάξης	652
4.9 Δ.Ε. ανώτερης τάξης τέλειας ή πλήρους μορφής	662

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Επίλυση Δ.Ε. με τη χρήση σειρών

5.1 Γενικά	671
5.2 Λύση γραμμικής Δ.Ε. 2 ^{ης} τάξης σε ομαλό σημείο	675
5.3 Συναρτήσεις και Δ.Ε. Bessel	690

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

6.1 Γενικά	697
6.2 Λύση κανονικού συστήματος Δ.Ε.	700
6.3 Λύση γραμμικού συστήματος 2 Δ.Ε. με 2 αγνώστους με σταθερούς συντελεστές	710
6.4 Λύση γραμμικού συστήματος περισσοτέρων των 2 Δ.Ε. με ισάριθμους αγνώστους	714
6.5 Εφαρμογές συστημάτων Δ.Ε.	717
6.5.1 Προβλήματα δονήσεων	717
6.5.2 Ορθογώνιες τροχιές οικογένειας επιφανειών	722
6.5.3 Δυναμικές γραμμές διανυσματικού πεδίου	723

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Στοιχεία από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

7.1 Γενικά	733
7.2 Πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών των Δ.Ε.Μ.Π.	738
7.3 Προσδιορισμός Δ.Ε.Μ.Π. από δοσμένη λύση της	744
7.4 Επίλυση γραμμικής Δ.Ε.Μ.Π. πρώτης τάξης δυο διαστάσεων	747
7.5 Ομογενής Δ.Ε.Μ.Π. δυο διαστάσεων με σταθερούς συντελεστές	756
7.6 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης δύο διαστάσεων με μερικές παραγώγους της μορφής $f(D_x, D_y)z = 0$ που δεν είναι ομογενής	758
7.7 Γραμμική διαφορική εξίσωση δύο διαστάσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές και με δεύτερο μέλος	

$f(x, y)$	761
7.8 Μη γραμμική εξίσωση δυο διαστάσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης	767
7.9 Λυμένες ασκήσεις Δ.Ε.Μ.Π	772
Ευρετήριο Ονομάτων	791
Βιβλιογραφία	795