

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1.1 Ορισμός.....	25
1.2 Ελάχιστονες ορίζουσες.....	27
1.3 Ανάπτυγμα ορίζουσας	28
1.4 Ιδιότητες των οριζουσών.....	33
1.5 Συμπληρωματικά σχετικά με τις ορίζουσες	42
1.6 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων nxn	43
1.6.1 Μέθοδος Crammer	43
1.6.2 Ομογενή γραμμικά συστήματα	46
Ασκήσεις	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΙΝΑΚΕΣ ή ΜΗΤΡΕΣ (MATRIX)

2.1 Η έννοια του πίνακα.....	53
2.2 Ισότητα πινάκων - ιδιότητες	55
2.3 Πράξεις πινάκων	57
2.3.1 Πρόσθεση πινάκων.....	57
2.3.2 Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα	59
2.3.3 Πολλαπλασιασμός πινάκων.....	61
2.4 Μοναδιαίος πίνακας - Διαγώνιος πίνακας - Τριγωνικός πίνακας.....	65

2.5	Ανάστροφος πίνακας - είδη πινάκων	69
2.6	Αντίστροφοι πίνακες - Ιδιότητες	74
2.7	Βαθμός ή τάξη πίνακα	79
2.8	Υπολογισμός του πίνακα A^{-1}	88
2.9	Γραμμικά συστήματα	96
2.9.1	Γραμμική εξίσωση	96
2.9.2	Γραμμικό σύστημα	97
2.9.3	Στοιχειώδεις πράξεις.....	98
2.10	Αλγόριθμος απαλοιφής του Gauss.....	99
2.11	Μέθοδος με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα.....	100
2.12	Χαρακτηριστική εξίσωση τετραγωνικού πίνακα, χαρακτηριστικές ρίζες (Ιδιοτιμές)	105
2.13	Ιδιοδιανύσματα ή χαρακτηριστικά διανύσματα.....	107
2.14	Δύναμη πίνακα	112
2.15	Όμοιοι πίνακες.....	114
Ασκήσεις		119

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1	Είδη μεγεθών.....	131
3.2	Διανύσματα-Διάφορα ορισμοί.....	132
3.3	Διαδοχικά διανύσματα - Διανυσματικές ακτίνες - Προβολή διανύσματος επί ευθεία ή επίπεδο	134
3.4	Στοιχειώδεις πράξεις διανυσμάτων	136
3.4.1	Άθροισμα	136
3.4.2	Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων	137
3.4.3	Γινόμενο	138
3.4.4	Συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων	140
3.4.5	Διαφορά	141
3.5	Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος	143
3.5.1	Άξονας	143
3.5.2	Αλγεβρική τιμή	144
3.5.3	Θεώρημα του Chasles	145

3.5.4 Συντεταγμένες διανύσματος στο επίπεδο.....	146
3.5.5 Συντεταγμένες διανύσματος στο χώρο	149
3.6 Απόσταση δύο σημείων.....	152
3.7 Λόγος συγγραμμικών διανυσμάτων	156
3.8 Απλός ή μερικός λόγος.....	157
3.9 Διπλός λόγος τεσσάρων σημείων	158
3.10 Συντεταγμένες σημείου που χωρίζει διάνυσμα σε λόγο λ.....	158
3.11 Γωνία δύο ημιευθειών.....	164
3.12 Γωνία διανυσμάτων	166
3.13 Συντελεστής διευθύνσεως διανύσματος.....	167
3.14 Συνημίτονα κατευθύνσεως διανύσματος.....	169
3.15 Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων (Βαθμωτό γινόμενο).....	171
3.15.1 Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου	173
3.15.2 Αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου	174
3.16 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	182
3.16.1 Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.....	184
3.16.2 Αναλυτική έκφραση του εξωτερικού γινομένου.....	185
3.17 Μικτό γινόμενο διανύσματος.....	192
3.17.1 Αναλυτική έκφραση του μικτού γινομένου.....	192
3.17.2 Γεωμετρική ερμηνεία του μικτού γινομένου	193
3.17.3 Ιδιότητες του μικτού γινομένου.....	195
Ασκήσεις	204

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

4.1 Γενικά	211
4.2 Σύστημα πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο	212
4.3 Σφαιρικές συντεταγμένες	213
4.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες.....	214
4.5 Αλλαγή αξόνων καρτεσιανών συντεταγμένων.....	217
4.5.1 Παράλληλη μετατόπιση αξόνων	218
4.5.2 Παράλληλη μεταφορά και στροφή των αξόνων.....	221

Ασκήσεις	224
----------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

5.1 Γενικά	227
5.2 Η ευθεία.....	228
5.2.1 Διανυσματική εξίσωση ευθείας.....	228
5.2.2 Διανυσματική εξίσωση ευθείας από δύο σημεία	229
5.2.3 Παραμετρική εξίσωση ευθείας	231
5.2.4 Αναλυτική εξίσωση ευθείας.....	232
5.2.5 Γενική μορφή εξισώσεως ευθείας	232
5.2.6 Διερεύνηση της εξισώσεως ευθείας	234
5.2.7 Συντελεστής διεύθυνσεως ευθείας.....	236
5.2.8 Ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας.....	237
5.2.9 Γωνία ευθειών	238
5.2.10 Σχετική θέση δύο ευθειών του αυτού επιπέδου.....	240
5.2.11 Συνθήκη για να διέρχονται τρεις ευθείες από το αυτό σημείο	241
5.2.12 Επίπεδο δέσμης ευθειών.....	242
5.2.13 Προσανατολισμός επιπέδου ως προς ευθεία ή σύνολο λύσεων γραμμικής ανισότητας ως προς x, y	244
5.2.14 Απόσταση σημείου από ευθεία	246
5.2.15 Εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες.....	248
5.3 Κωνικές τομές.....	269
5.4 Κύκλος.....	271
5.4.1 Εξίσωση κύκλου.....	271
5.4.2 Εξίσωση κύκλου που περνά από τρία σημεία	275
5.4.3 Σχετική θέση κύκλου και ευθείας	276
5.4.4 Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου	276
5.5 Η έλλειψη	281
5.5.1 Εξίσωση της ελλείψεως	282
5.5.2 Στοιχεία της ελλείψεως	285
5.5.3 Παραμετρικές εξισώσεις ελλείψεως	287

5.5.4	Πολική εξίσωση ελλείψεως.....	288
5.5.5	Εξίσωση εφαπτομένης ελλείψεως.....	289
5.6	Η υπερβολή	296
5.6.1	Εξίσωση της υπερβολής.....	296
5.6.2	Στοιχεία της υπερβολής.....	299
5.6.3	Εξίσωση υπερβολής σε παραμετρική μορφή	300
5.6.4	Εξίσωση εφαπτομένης και καθέτου σε σημείο υπερβολής	301
5.7	Παραβολή	310
5.7.1	Εξίσωση της παραβολής	311
5.7.2	Παραμετρικές εξισώσεις παραβολής	313
5.7.3	Εξίσωση εφαπτομένης και καθέτου παραβολής	314
5.8	Εξίσωση κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες.....	317
5.8.1	Εξίσωση κωνικών γενικά	317
5.8.2	Πολικά διαγράμματα	320
5.8.3	Ο Λημνίσκος του Bernoulli	320
5.8.4	Καρδιοειδές διάγραμμα.....	321
5.9	Καμπύλες δευτέρου βαθμού	322
Ασκήσεις		327

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

6.1	Γενικά	339
6.2	Η ευθεία στο χώρο	341
6.2.1	Διανυσματική εξίσωση ευθείας.....	341
6.2.2	Παραμετρική εξίσωση ευθείας	342
6.2.3	Αναλυτική εξίσωση ευθείας.....	343
6.3	Επίπεδο	343
6.3.1	Διανυσματική και παραμετρική εξίσωση επιπέδου	343
6.3.2	Αναλυτική εξίσωση του επιπέδου.....	347
6.3.3	Γενική μορφή εξισώσεως επιπέδου	348
6.3.4	Διερεύνηση της $Ax + By + Cz + D = 0$	349
6.3.5	Σχετική θέση δύο επιπέδων	351

6.3.6	Προσανατολισμός του χώρου ως προς επίπεδο	352
6.3.7	Απόσταση σημείου από επίπεδο-γωνία δύο επιπέδων	352
6.3.8	Αξονική και κεντρική δέσμη επιπέδων	354
6.4	Επιφάνειες δευτέρου βαθμού	358
6.4.1	Κυλινδρικές επιφάνειες με γενέτηρα παράλληλη προς έναν άξονα συντεταμένων	358
6.4.2	Σφαίρα	360
6.4.3	Ελλειψοειδές.....	361
6.4.4	Υπερβολοειδές.....	363
6.4.5	Μονόχωνο υπερβολοειδές.....	364
6.4.6	Δίχωνο υπερβολοειδές.....	366
6.4.7	Παραβολοειδή.....	369
6.4.8	Ελλειπτικό παραβολοειδές	369
6.4.9	Υπερβολικό παραβολοειδές	370
6.4.10	Κώνος.....	371
Ασκήσεις		373

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥΣ (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥΣ) ΧΩΡΟΥΣ

7.1	Γενικά	375
7.2	Ορισμός γραμμικού χώρου	376
7.3	Γραμμικοί (διανυσματικοί) υπόχωροι	378
7.3.1	Ορισμός.....	379
7.3.2	Πρόταση.....	379
7.4	Ιδιότητες στους γραμμικούς χώρους.....	380
7.5	Γραμμική εξάρτηση	382
7.5.1	Ορισμός.....	382
7.5.2	Ορισμός.....	382
7.5.3	Ορισμός.....	383
7.5.4	Ιδιότητες.....	386
7.6	Βάση και διάσταση γραμμικού χώρου	390

7.6.1	Ορισμός.....	390
7.6.2	Πρόταση.....	390
7.6.3	Ορισμός.....	392
7.6.4	Πρόταση.....	392
7.7	Ενκλείδιοι γραμμικοί χώροι	395
7.7.1	Ορισμός.....	395
7.7.2	Ορισμός.....	396
7.7.3	Ορισμός.....	396
7.7.4	Ορισμός.....	397
7.7.5	Ανισότητες Cauchy - Schwartz και τριγωνική.....	398
7.7.6	Γωνία δύο διανυσμάτων.....	399
Ασκήσεις		403

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

8.1	Σύνολο των πραγματικών αριθμών	407
8.1.1	Υποσύνολα του $\mathbb{R}$	408
8.1.2	Γραμμικό διάγραμμα των συνόλων	409
8.1.3	Διαστήματα πραγματικών αριθμών	410
8.1.4	Περιοχή πραγματικού αριθμού x_0 ή σημείου x_0	414
8.2	Σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$	414
8.2.1	Ορισμός και άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών.....	415
8.2.2	Ιδιότητες της ισότητας και πράξεις του $\mathbb{C}$	418
8.2.3	Συμμετρικά στοιχεία στις πράξεις	419
8.2.4	Αφαίρεση και διαίρεση μιγαδικών	421
8.2.5	Η φανταστική μονάδα	421
8.2.6	Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί - ιδιότητες	426
8.2.7	Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού αριθμού.....	431
8.2.8	Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος και της διαφοράς μιγαδικών αριθμών	434
8.2.9	Μέτρο ή απόλυτος τιμή μιγαδικού αριθμού.....	436
8.2.10	Τριγωνομετρική ή πολική μορφή μιγαδικού αριθμού	444

8.2.11 Θεωρήματα των μιγαδικών αριθμών	448
8.2.12 Τύπος του De Moivre	450
8.2.13 Νιοστές ρίζες μιγάδα	452
8.2.14 Νιοστές ρίζες της μονάδας.....	453
8.2.15 Εκθετική μορφή μιγάδα.....	457
8.2.16 Νεπέριος λογάριθμος μιγαδικού αριθμού	460
Ασκήσεις	466

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ & ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1.1 Ορισμός.....	471
1.2 Γραφική παράσταση ή γράφημα συνάρτησης	474
1.3 Ισότητα και στοιχειώδεις πράξεις συναρτήσεων	479
1.4 Σύνθεση συναρτήσεως.....	479
1.5 Άρτιες περιττές και περιοδικές συναρτήσεις	481
1.6 Μονοτονία συναρτήσεως.....	484
1.7 Αντίστροφη συνάρτηση.....	486
1.7.1 Θεώρημα	487
1.8 Ακρότατα συναρτήσεως.....	489
1.9 Κατηγορίες συναρτήσεων	490
1.9.1 Υπερβατικές συναρτήσεις	490
Ασκήσεις	502

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ και ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

2.1 Όριο μεταβλητής	507
2.2 Όριο συναρτήσεως	511

2.2.1	Πλευρικά όρια	515
2.2.2	Όριο για $x \rightarrow +\infty$	517
2.2.3	Όριο για $x \rightarrow -\infty$	517
2.2.4	Όριο για $x \rightarrow \gamma$	518
2.3	Θεωρήματα των ορίων	521
Ασκήσεις		529

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

3.1	Συνέχεια συναρτήσεως σε ένα σημείο	531
3.1.1	Είδη ασυνέχειας	533
3.1.2	Συνέχεια συναρτήσεως σε ένα διάστημα. Πλευρική συνέχεια.	536
3.1.3	Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων Θεμελιώδες θεώρημα	537
Ασκήσεις		543

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

4.1	Η έννοια της παραγώγου	547
4.2	Πλευρικές παράγωγοι	550
4.3	Παράγωγος και συνέχεια συναρτήσεως	553
4.4	Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου	555
4.5	Παράγωγος βασικών συναρτήσεων	559
4.5.1	Παράγωγος σταθεράς συνάρτησης $y = f(x) = c$	559
4.5.2	Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης $y = f(x) = x$	559
4.5.3	Η παράγωγος της $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}^*$	560
4.5.4	Παράγωγος της $y = f(x) = e^x$	560
4.5.5	Η παράγωγος της $f(x) = \ln x, x > 0$	561
4.5.6	Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$	562
4.5.7	Η Παράγωγος της $f(x) = \sigma \upsilon \nu x, x \in \mathbb{R}$	563
4.5.8	Η παράγωγος της $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$	563

4.6	Κανόνες παραγώγισης	564
4.6.1	Παράγωγος αθροίσματος	564
4.6.2	Παράγωγος γινομένου	565
4.6.3	Παράγωγος πηλίκου	567
4.6.4	Παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x) = \varepsilon f x$	568
4.6.5	Παράγωγος της $y = f(x) = \sigma f x$	568
4.7	Παράγωγος της $y = f(x) = \log_{\alpha} x$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $x > 0$	569
4.8	Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	569
4.9	Παράγωγοι ορισμένων συναρτήσεων	570
4.9.1	Παράγωγος των $y = \eta \mu f(x)$, $y = \sigma \nu f(x)$, $y = \varepsilon f f(x)$, $y = \sigma f f(x)$	570
4.9.2	Παράγωγος της $y = \alpha^{f(x)}$, $\alpha > 0$	571
4.9.3	Παράγωγος της $y = \log_{\alpha} f(x)$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $f(x) > 0$	571
4.9.4	Παράγωγος της $y = f^{\lambda}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	572
4.9.5	Παράγωγος της σύνθετης εκθετικής συνάρτησης $y = u^v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$	573
4.10	Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης	573
4.11	Παράγωγοι αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων	575
4.11.1	Παράγωγος της $y = \tau \omicron \xi \eta \mu x$, $y = \tau \omicron \xi \sigma \nu x$	575
4.11.2	Παράγωγος της $y = \tau \omicron \xi \varepsilon f x$, $y = \tau \omicron \xi \sigma f x$	576
4.12	Παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων	576
4.13	Παράγωγος παραμετρικών συναρτήσεων	579
4.14	Παράγωγος πεπλεγμένων συναρτήσεων	581
4.15	Παράγωγοι ανωτέρας τάξεως	582
4.16	Πίνακας παραγώγων βασικών και σύνθετων βασικών συναρτήσεων	585
Ασκήσεις		586

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.1	Ορισμός	593
5.2	Κανόνες διαφορίσεως	594
5.3	Διαφορικά ανωτέρας τάξεως	595

5.4 Γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού.....	595
Ασκήσεις	599

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

6.1 Θεώρημα Fermat.....	601
6.2 Θεώρημα Rolle	603
6.3 Θεώρημα μέσης τιμής ή θεώρημα Lagrange	608
6.4 Θεώρημα Cauchy ή Δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής	612
6.5 Ανάπτυγμα Taylor και Maclaurin.....	612
6.6 Μονοτονία συναρτήσεων	619
6.7 Ακρότατα συναρτήσεων	623
6.7.1 Γενικά	623
6.7.2 Κριτήριο πρώτης παραγώγου	624
6.7.3 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου.....	629
6.8 Κοίλα και κυρτά σημεία συναρτήσεων - Σημεία Καμπής	637
6.9 Ασύμπτωτες καμπύλης	641
6.10 Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνας De L' Hospital	645
6.10.1 Εισαγωγή	645
6.10.2 Θεώρημα Cauchy στις απροσδιόριστες μορφές	645
6.10.3 Θεώρημα του de l' hospital (Περίπτωση $\frac{0}{0}$).....	648
6.10.4 Θεώρημα του de l' hospital (Περίπτωση $\frac{\infty}{\infty}$)	651
6.10.5 Μορφή 0. ($\pm\infty$).....	654
6.10.6 Μορφή ($\infty-\infty$)	656
6.10.7 Μορφές : 0^0 , 1^∞ , ∞^0	658
6.11 Γραφική παράσταση συναρτήσεων	659
6.12 Χρήση της παραγώγου στην κινηματική.....	661
Ασκήσεις	667

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

7.1	Γενικά	673
7.2	Η έννοια του αορίστου ολοκληρώματος.....	674
7.2.1	Πρόταση	675
7.2.2	Θέωρημα	675
7.2.3	Ορισμός.....	676
7.3	Ιδιότητες του αορίστου ολοκληρώματος	677
7.4	Το ορισμένο ολοκλήρωμα συνεχούς συναρτήσεως	678
7.5	Βοηθητικές έννοιες.....	681
7.6	Άθροισμα Reimann. Γεωμετρική σημασία	681
7.7	Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος	686
7.8	Θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού	687
7.8.1	Θεώρημα	688
7.9	Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος	689
7.9.1	Θεώρημα : (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού	689
7.9.2	Θεώρημα : (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού	691
Ασκήσεις		694

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

8.1	Θεμελιώδη ολοκληρώματα	697
8.2	Ολοκλήρωση κατά μέρη.....	699
8.3	Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	700
8.4	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (Παραγοντική)	703
8.5	Αναγωγικοί τύποι.....	708
Ασκήσεις		712

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

9.1	Γενικά-Ολοκλήρωση ειδικών μορφών ρητών συναρτήσεων	715
9.2	Υπολογισμός του ολοκληρώματος: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	717
9.2.1	Το $Q(x)$ έχει ρίζες απλές πραγματικές	719
9.2.2	Το $Q(x)$ έχει ρίζες πολλαπλές πραγματικές.....	721
9.2.3	Το $Q(x)$ έχει ρίζες απλές μιγαδικές (φανταστικές)	724
9.2.4	Το $Q(x)$ έχει ρίζες πολλαπλές μιγαδικές (φανταστικές)	727
Ασκήσεις		729

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

10.1	Ολοκληρώματα που περιέχουν μια από τις μορφές: $\sqrt{\alpha^2 - b^2x^2}$, $\sqrt{\alpha^2 + b^2x^2}$, $\sqrt{b^2x^2 - \alpha^2}$	731
10.2	Τα ολοκληρώματα είναι της μορφής: $I_1 = \int \frac{x^v dx}{\sqrt{\alpha x + \beta}}$, $I_2 = \int x^v \sqrt{\alpha x + \beta} dx$	738
10.3	Ολοκληρώματα της μορφής: $I = R(x, x^{\frac{q_1}{q_1}}, x^{\frac{q_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{q_r}{q_r}}) dx$	739
10.4	Ολοκληρώματα διαφορικών διωνύμων	741
Ασκήσεις		743

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

11.1	Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$	745
11.1.1	Ειδικές αντικαταστάσεις	746

11.2 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta \mu \kappa \chi \sigma \nu \lambda \chi d\chi$, $\int \eta \mu \kappa \chi \eta \mu \lambda \chi d\chi$, $\int \sigma \nu \eta \kappa \chi \sigma \nu \lambda \chi d\chi$	748
11.3 Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \eta \mu^{\nu} \chi \sigma \nu \eta^{\lambda} \chi d\chi$	750
11.4 Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \epsilon \varphi^{\lambda} \chi d\chi$ ή $I = \int \frac{d\chi}{\epsilon \varphi^{\lambda} \chi}$	751
Ασκήσεις	753

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

12.1 Μέθοδος των τραπεζίων.....	755
12.2 Μέθοδος του Simson	757
Ασκήσεις	761

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

13.1 Ορισμός.....	763
Ασκήσεις	768

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

14.1 Εμβαδά επιπέδων χωρίων	769
14.1.1 Υπολογισμός εμβαδών σε καρτεσιανές συντεταγμένες.....	769
14.1.2 Υπολογισμός εμβαδών όταν η καμπύλη δίνεται παραμετρικά	772
14.1.3 Υπολογισμός εμβαδών όταν η καμπύλη δίνεται σε πολικές συντεταγμένες	773

14.2 Όγκοι στερεών	781
14.2.1 Όγκος στερεού με γνωστές κάθετες τομές προς έναν άξονα	781
14.2.2 Όγκος στερεού εκ περιστροφής	785
14.3 Μήκος τόξου επιπέδου καμπύλης	791
14.3.1 Μήκος τόξου σε καρτεσιανές συντεταγμένες	791
14.3.2 Μήκος τόξου όταν η καμπύλη δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις	794
14.3.3 Μήκος τόξου όταν η καμπύλη αναφέρεται σε πολικές συντεταγμένες	795
14.4 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής	798
14.4.1 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού, εκ περιστροφής σε καρτεσιανές συντεταγμένες	798
14.4.2 Εμβαδό επιφάνειας, εκ περιστροφής όταν η καμπύλη δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις	801
14.4.3 Εμβαδό επιφάνειας, εκ περιστροφής όταν η καμπύλη δίνεται σε πολικές συντεταγμένες	801
Ασκήσεις	803

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

15.1 Έργο	807
15.1.1 Έργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη	807
15.1.2 Έργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη	807
15.2 Ροπές επιπέδων επιφανειών και ροπές στερεών εκ περιστροφής - κέντρα βάρους	811
15.2.1 Γενικά	811
15.2.2 Ροπές επιπέδων επιφανειών - Κέντρο βάρους αριθμός:	812
15.2.3 Ροπές στερεών εκ περιστροφής - Κέντρο βάρους	815

15.2.4 Θεώρημα (πρώτο του Πάππου)	816
15.3 Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών και ροπές αδρανείας στερεών εκ περιστροφής	822
15.3.1 Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών.....	822
15.3.2 Ροπές αδρανείας στερεών εκ περιστροφής.....	824
15.3.3 Ακτίνα ροπής αδρανείας	826
15.4 Ροπή και ροπή αδρανείας υλικού σημείου και συστήματος υλικών σημείων ως προς ευθεία	831
15.5 Κέντρο βάρους μιας επιπέδου καμπύλης και ροπές αδρανείας	832
15.6 Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας μιας επιφάνειας εκ περιστροφής	837
15.6.1 Θεώρημα του Πάππου (δεύτερο)	837
15.7 Πίεση ρευστών	839
15.7.1 Πίεση.....	839
15.7.2 Δύναμη σε μια επίπεδη επιφάνεια που θεωρείται βυθισμένη σε ένα υγρό	840
Ασκήσεις	844
Βιβλιογραφία	847