

# Περιεχόμενα

|          |                                                                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Εξισώσεις Διαφορών</b>                                                                               | <b>1</b>  |
| 1.1      | Ορισμοί . . . . .                                                                                       | 1         |
| 1.2      | Παραδείγματα . . . . .                                                                                  | 2         |
| 1.3      | Παραγωγή εξισώσεων διαφορών . . . . .                                                                   | 6         |
| 1.4      | Θεώρημα ύπαρξης και μονοσήμαντου λύσης . . . . .                                                        | 7         |
| 1.5      | Οι τελεστές $\Delta$ και $E$ . . . . .                                                                  | 8         |
| 1.6      | Ο τελεστής $\Delta^{-1}$ . . . . .                                                                      | 15        |
| 1.7      | Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης . . . . .                                                     | 16        |
| 1.7.1    | Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές                                      | 22        |
| <b>2</b> | <b>Σημεία ισορροπίας-Ευστάθεια</b>                                                                      | <b>25</b> |
| 2.1      | Ορισμοί και παραδείγματα . . . . .                                                                      | 25        |
| 2.2      | Γεωμετρική-γραφική μέθοδος χαρακτηρισμού σημείου ισορροπίας . . . . .                                   | 28        |
| 2.3      | Κριτήρια ευστάθειας . . . . .                                                                           | 32        |
| 2.4      | Περιοδικότητα . . . . .                                                                                 | 42        |
| 2.5      | Διακλαδώσεις-Χάος . . . . .                                                                             | 49        |
| 2.6      | Σύστημα δύο εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης . . . . .                                                   | 60        |
| <b>3</b> | <b>Γραμμικές εξισώσεις διαφορών</b>                                                                     | <b>64</b> |
| 3.1      | Ορισμοί και βασικές προτάσεις . . . . .                                                                 | 64        |
| 3.2      | Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Casorati - Θεμελιώδες σύστημα λύσεων . . . . .                          | 66        |
| 3.3      | Γενική λύση ομογενούς γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές . . . . .                    | 71        |
| 3.4      | Σχέση ομογενών γραμμικών με σταθερούς συντελεστές διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών . . . . . | 85        |
| 3.5      | Μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών . . . . .                                                        | 88        |
| 3.6      | Μέθοδος αντίστροφου τελεστή . . . . .                                                                   | 96        |
| 3.7      | Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων . . . . .                                                              | 109       |
| 3.8      | Πρόβλημα συνοριακών τιμών . . . . .                                                                     | 114       |
| 3.8.1    | Πρόβλημα συνοριακών τιμών Sturm-Liouville . . . . .                                                     | 117       |

|          |                                                                                                 |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Οριακή συμπεριφορά και ευστάθεια</b>                                                         | <b>121</b> |
| 4.1      | Εισαγωγή-παραδείγματα . . . . .                                                                 | 121        |
| 4.2      | Ευστάθεια εξισώσεων διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές .                          | 123        |
| 4.3      | Μοντέλο Εθνικής Οικονομίας . . . . .                                                            | 127        |
| 4.4      | Μοντέλο διαπραγματεύσεων μεταξύ εργαζομένων και εργοδοσίας . . . . .                            | 132        |
| 4.5      | Μοντέλο ανταγωνιστικών εξοπλισμών του Richardson . . . . .                                      | 135        |
| <b>5</b> | <b>Γραμμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών</b>                                                    | <b>138</b> |
| 5.1      | Μέθοδοι επίλυσης και παραδείγματα . . . . .                                                     | 138        |
| 5.2      | Μελέτη γραμμικής εξίσωσης διαφορών $n$ -τάξης μέσω ισοδύναμου συστήματος πρώτης τάξης . . . . . | 153        |
| 5.3      | Διακριτοποίηση συνεχούς γραμμικού συστήματος ε-λέγχου . . . . .                                 | 155        |
| 5.4      | Ευστάθεια διακριτού συστήματος που προκύπτει από διακριτοποίηση συνεχούς συστήματος . . . . .   | 158        |
| 5.5      | Μη αυτόνομα γραμμικά συστήματα . . . . .                                                        | 158        |
| <b>6</b> | <b>Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών</b>                                                          | <b>167</b> |
| 6.1      | Ομογενείς εξισώσεις . . . . .                                                                   | 167        |
| 6.2      | Εξισώσεις Riccati . . . . .                                                                     | 170        |
| 6.3      | Εξίσωση Clairaut . . . . .                                                                      | 172        |
| 6.4      | Διάφορες μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών . . . . .                                              | 174        |
| <b>7</b> | <b>Μετασχηματισμός <math>Z</math></b>                                                           | <b>181</b> |
| 7.1      | Ορισμοί και βασικά παραδείγματα . . . . .                                                       | 181        |
| 7.2      | Ιδιότητες του μετασχηματισμού $Z$ . . . . .                                                     | 185        |
| 7.2.1    | Μετασχηματισμός $Z$ των διαφορών $\nabla y_k$ και $\Delta y_k$ . . . . .                        | 188        |
| 7.3      | Αντίστροφος μετασχηματισμός $Z$ και λύσεις εξισώσεων διαφορών . . . . .                         | 193        |
| 7.3.1    | Μέθοδος δυναμοσειρών . . . . .                                                                  | 193        |
| 7.3.2    | Μέθοδος μερικών κλασμάτων . . . . .                                                             | 195        |
| 7.3.3    | Ολοκληρωτική μέθοδος αντιστροφής . . . . .                                                      | 202        |