

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης

|   |    |
|---|----|
| 1.1 Γενικά .....  | 13 |
| 1.2 Οικογένειες καμπυλών ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων .....                                 | 22 |
| 1.2.1 Εύρεση διαφορικής εξίσωσης από τη λύση της .....  | 22 |
| 1.2.2 Εύρεση της περιβάλλουσας οικογένειας καμπυλών .....                                     | 28 |
| 1.3 Γραμμικό στοιχείο και πεδίο διευθύνσεων μιας Δ.Ε. πρώτης τάξης και κανονικής μορφής ..... | 32 |
| 1.4 Ιδιάζουσα λύση Δ.Ε. πρώτης τάξης .....  | 35 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

|  |    |
|--|----|
| 2.1 Γενικά .....   | 41 |
| 2.2 Προσδιορισμός μιας μερικής λύσης από τη γενική λύση της Δ.Ε. Πρόβλημα των αρχικών και συνοριακών τιμών ..... | 42 |
| 2.3 Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές .....   | 44 |
| 2.4 Διαφορικές εξισώσεις που γίνονται χωριζόμενων μεταβλητών μετά από κατάλληλο μετασχηματισμό .....             | 50 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 2.4.1  | Δ.Ε. της μορφής $y' = f(ax + by + \gamma)$ με $a \neq 0, \beta \neq 0$ .....   | 50  |
| 2.4.2  | Δ.Ε. της μορφής $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ή $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , $y \neq 0, x \neq 0$<br>αντίστοιχα ..... | 52  |
| 2.4.3  | Δ.Ε. της μορφής $x^2y' = f(xy)$ .....  | 53  |
| 2.4.4  | Δ.Ε. της μορφής $yy' + f(x^2 \pm y^2)\sigma(x) \pm x = 0$ .....  | 55  |
| 2.4.5  | Δ.Ε. της μορφής $y' = ay^v + \beta x^{\frac{v}{1-v}}$ , $x > 0, v \neq 1$ .....  | 56  |
| 2.5    | Ομογενείς Δ.Ε. ....  | 60  |
| 2.6    | Δ.Ε. Αναγόμενες σε ομογενείς .....   | 66  |
| 2.7    | Γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης .....  | 73  |
| 2.7.1  | Ομογενής γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης .....  | 74  |
| 2.7.2  | Πλήρης γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης .....  | 74  |
| 2.7.3  | Γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης με σταθερούς<br>συντελεστές και σταθερό 2 <sup>ο</sup> μέλος .....                                  | 76  |
| 2.7.4  | Γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης με σταθερούς<br>συντελεστές .....   | 77  |
| 2.8    | Δ.Ε. του Bernoulli .....   | 83  |
| 2.9    | Δ.Ε. του Riccati .....   | 88  |
| 2.10   | Πλήρεις ή ακριβείς Δ.Ε. ....   | 96  |
| 2.11   | Δ.Ε. πρώτης τάξης και ανώτερου βαθμού .....  | 115 |
| 2.12   | Η Δ.Ε. του Clairaut .....  | 125 |
| 2.13   | Η Δ.Ε. του Lagrange .....  | 129 |
| 2.14   | Επίλυση Δ.Ε. πρώτης τάξης και ανώτερου βαθμού<br>πεπλεγμένης μορφής με μετασχηματισμούς .....                                  | 134 |
| 2.14.1 | Γενικά .....   | 134 |
| 2.14.2 | Μετασχηματισμός Legendre .....   | 135 |
| 2.14.3 | Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες .....   | 138 |
| 2.14.4 | Εναλλαγή του ρόλου των $x$ και $y$ .....   | 139 |
| 2.15   | Εφαρμογές Δ.Ε. 1ης τάξης .....   | 142 |
| 2.15.1 | Ισογώνιες τροχιές .....  | 142 |
| 2.15.2 | Ορθογώνιες τροχιές .....   | 144 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.15.3 Ηλεκτρικά κυκλώματα .....                      | 149 |
| 2.15.4 Πρόβλημα ψύξης .....                           | 152 |
| 2.15.5 Πτώση των σωμάτων .....                        | 154 |
| 2.16 Λυμένες ασκήσεις 2 <sup>ου</sup> κεφαλαίου ..... | 162 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

#### Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 Γενικά .....   | 175 |
| 3.2 Γραμμικές ομογενείς Δ.Ε. ανώτερης τάξης με σταθερούς<br>συντελεστές .....          | 180 |
| 3.3 Πλήρεις γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης με σταθερούς<br>συντελεστές .....            | 187 |
| 3.4 Γραμμικές Δ.Ε. 2 <sup>ης</sup> τάξης με μεταβλητούς συντελεστές .....              | 210 |
| 3.5 Τελεστής παραγωγίσης και γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης ...                         | 216 |
| 3.5.1 Γενικά .....   | 216 |
| 3.5.2 Εφαρμογή των τελεστών στη λύση των Δ.Ε. με<br>σταθερούς συντελεστές .....        | 225 |
| 3.5.3 Ειδικές μορφές γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης με<br>μεταβλητούς συντελεστές ..... | 241 |
| 3.5.4 Εφαρμογές των γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης .....                                | 248 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

#### Ειδικές μορφές Δ.Ε. ανώτερης τάξης

|  |     |
|--|-----|
| 4.1 Γενικά .....   | 259 |
| 4.2 Εξισώσεις της μορφής $y^{(n)} = f(x)$ ( $n$ - τάξης).....      | 259 |
| 4.3 Εξισώσεις της μορφής $F(x, y^{(n)}) = 0$ .....                 | 264 |
| 4.4 Εξισώσεις της μορφής $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ..... | 267 |
| 4.5 Εξισώσεις της μορφής $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$ .....         | 271 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.6 | Εξισώσεις της μορφής $F(y^{(v)}, y^{(v-2)}) = 0$ .....         | 275 |
| 4.7 | Εξισώσεις της μορφής $F(y, y', y'', \dots, y^{(v)}) = 0$ ..... | 277 |
| 4.8 | Ομογενείς Δ.Ε. ανώτερης τάξης .....                            | 280 |
| 4.9 | Δ.Ε. ανώτερης τάξης τέλειας ή πλήρους μορφής .....             | 290 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Επίλυση Δ.Ε. με τη χρήση σειρών

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Γενικά .....  | 299 |
| 5.2 | Λύση γραμμικής Δ.Ε. 2 <sup>ης</sup> τάξης σε ομαλό σημείο ..... | 303 |
| 5.3 | Συναρτήσεις και Δ.Ε. Bessel .....                               | 318 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 6.1   | Γενικά .....  | 325 |
| 6.2   | Λύση κανονικού συστήματος Δ.Ε. ....   | 328 |
| 6.3   | Λύση γραμμικού συστήματος 2 Δ.Ε. με 2 αγνώστους με σταθερούς συντελεστές .....  | 338 |
| 6.4   | Λύση γραμμικού συστήματος περισσοτέρων των 2 Δ.Ε. με ισάριθμους αγνώστους ..... | 342 |
| 6.5   | Εφαρμογές συστημάτων Δ.Ε. ....  | 345 |
| 6.5.1 | Προβλήματα δονήσεων .....   | 345 |
| 6.5.2 | Ορθογώνιες τροχιές οικογένειας επιφανειών .....                                 | 350 |
| 6.5.3 | Δυναμικές γραμμές διανυσματικού πεδίου .....                                    | 351 |

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7****Στοιχεία από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων  
με μερικές παραγώγους**

|   |     |
|---|-----|
| 7.1 Γενικά .....  | 361 |
| 7.2 Πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών των Δ.Ε.Μ.Π. ....   | 366 |
| 7.3 Προσδιορισμός Δ.Ε.Μ.Π. από δοσμένη λύση της .....   | 372 |
| 7.4 Επίλυση γραμμικής Δ.Ε.Μ.Π. πρώτης τάξης δυο<br>διαστάσεων .....   | 375 |
| 7.5 Ομογενής Δ.Ε.Μ.Π. δυο διαστάσεων με σταθερούς<br>συντελεστές .....  | 384 |
| 7.6 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης δύο διαστάσεων με μερικές<br>παραγώγους της μορφής $f(D_x, D_y)z = 0$ που δεν είναι<br>ομογενής .....   | 386 |
| 7.7 Γραμμική διαφορική εξίσωση δύο διαστάσεων με μερικές<br>παραγώγους με σταθερούς συντελεστές και με δεύτερο μέλος<br>$f(x, y)$ ..... | 389 |
| 7.8 Μη γραμμική εξίσωση δυο διαστάσεων με μερικές<br>παραγώγους πρώτης τάξης .....  | 395 |
| 7.9 Λυμένες ασκήσεις Δ.Ε.Μ.Π .....  | 400 |
| Πίνακας Ολοκληρωμάτων .....   | 419 |
| Βιβλιογραφία .....  | 429 |