

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1.1 Ορισμός.....	19
1.2 Γραφική παράσταση ή γράφημα συνάρτησης	22
1.3 Ισότητα και στοιχειώδεις πράξεις συναρτήσεων	27
1.4 Σύθεση συναρτήσεως	27
1.5 Άρτιες περιττές και περιοδικές συναρτήσεις	29
1.6 Μονοτονία συναρτήσεως	32
1.7 Αντίστροφη συνάρτηση	34
1.7.1 Θεώρημα	35
1.8 Ακρότατα συναρτήσεως	37
1.9 Κατηγορίες συναρτήσεων	38
1.9.1 Υπερβατικές συναρτήσεις	38
Ασκήσεις	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ και ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

2.1	Όριο μεταβλητής	55
2.2	Όριο συναρτήσεως	59
2.2.1	Πλευρικά όρια	63
2.2.2	Όριο για $x \rightarrow +\infty$	65
2.2.3	Όριο για $x \rightarrow -\infty$	65
2.2.4	Όριο για $x \rightarrow \gamma$	66
2.3	Θεωρήματα των ορίων	69
	Ασκήσεις	77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

3.1	Συνέχεια συναρτήσεως σε ένα σημείο	79
3.1.1	Είδη ασυνέχειας	81
3.1.2	Συνέχεια συναρτήσεως σε ένα διάστημα. Πλευρική συνέχεια.	84
3.1.3	Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων Θεμελιώδες θεώρημα	85
	Ασκήσεις	91

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

4.1	Η έννοια της παραγώγου	95
4.2	Πλευρικές παράγωγοι	98
4.3	Παράγωγος και συνέχεια συναρτήσεως	101
4.4	Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου	103

4.5	Παράγωγος βασικών συναρτήσεων	107
4.5.1	Παράγωγος σταθεράς συνάρτησης $y = f(x) = c$	107
4.5.2	Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης $y = f(x) = x$	107
4.5.3	Η παράγωγος της $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}^*$	108
4.5.4	Παράγωγος της $y = f(x) = e^x$	108
4.5.5	Η παράγωγος της : $f(x) = \ln x, x > 0$	109
4.5.6	Η παράγωγος της συνάρτησης : $f(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$	110
4.5.7	Η Παράγωγος της $f(x) = \sigma \nu \eta x, x \in \mathbb{R}$	111
4.5.8	Η παράγωγος της $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$	111
4.6	Κανόνες παραγώγισης	112
4.6.1	Παράγωγος αθροίσματος	112
4.6.2	Παράγωγος γινομένου	113
4.6.3	Παράγωγος πηλίκου	115
4.6.4	Παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x) = \epsilon \phi x$	116
4.6.5	Παράγωγος της $y = f(x) = \sigma \phi x$	116
4.7	Παράγωγος της $y = f(x) = \log_{\alpha} x, \alpha > 0, \alpha \neq 1, x > 0$	117
4.8	Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	117
4.9	Παράγωγοι ορισμένων συναρτήσεων	118
4.9.1	Παράγωγος των $y = \eta \mu f(x), y = \sigma \nu \eta f(x), y = \epsilon \phi f(x),$ $y = \sigma \phi f(x)$	118
4.9.2	Παράγωγος της $y = \alpha^{f(x)}, \alpha > 0$	119
4.9.3	Παράγωγος της $y = \log_{\alpha} f(x), \alpha > 0, \alpha \neq 1, f(x) > 0$	119
4.9.4	Παράγωγος της $y = f^{\lambda}(x), \lambda \in \mathbb{R}$	120
4.9.5	Παράγωγος της σύνθετης εκθετικής συνάρτησης $y = u^v, u = u(x), v = v(x)$	121
4.10	Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης	121
4.11	Παράγωγοι αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων	123
4.11.1	Παράγωγος της $y = \tau \omicron \xi \eta \mu x, y = \tau \omicron \xi \sigma \nu \eta x$	123
4.11.2	Παράγωγος της $y = \tau \omicron \xi \epsilon \phi x, y = \tau \omicron \xi \sigma \phi x$	124
4.12	Παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων	124
4.13	Παράγωγος παραμετρικών συναρτήσεων	127
4.14	Παράγωγος πεπλεγμένων συναρτήσεων	129

4.15 Παράγωγοι ανωτέρας τάξεως	130
4.16 Πίνακας παραγώγων βασικών και σύνθετων βασικών συναρτήσεων	133
Ασκήσεις	134

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.1 Ορισμός	141
5.2 Κανόνες διαφορίσεως	142
5.3 Διαφορικά ανωτέρας τάξεως	143
5.4 Γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού	143
Ασκήσεις	147

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

6.1 Θεώρημα Fermat	149
6.2 Θεώρημα Rolle	151
6.3 Θεώρημα μέσης τιμής ή θεώρημα Lagrange	156
6.4 Θεώρημα Gauchy ή Δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής	160
6.5 Ανάπτυγμα Taylor και Maclaurin	160
6.6 Μονοτονία συναρτήσεων	167
6.7 Ακρότατα συναρτήσεων	171
6.7.1 Γενικά	171
6.7.2 Κριτήριο πρώτης παραγώγου	172
6.7.3 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου	177
6.8 Κοίλα και κυρτά σημεία συναρτήσεων - Σημεία Καμπής	185
6.9 Ασύμπτωτες καμπύλης	189

6.10	Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνας De L' Hospital	193
6.10.1	Εισαγωγή	193
6.10.2	Θεώρημα Cauchy στις απροσδιόριστες μορφές	193
6.10.3	Θεώρημα του de l' hospital (Περίπτωση $\frac{0}{0}$)	196
6.10.4	Θεώρημα του de l' hospital (Περίπτωση $\frac{\infty}{\infty}$)	199
6.10.5	Μορφή 0. ($\pm\infty$)	202
6.10.6	Μορφή ($\infty-\infty$)	204
6.10.7	Μορφές : 0^0 , 1^∞ , ∞^0	206
6.11	Γραφική παράσταση συναρτήσεων	207
6.12	Χρήση της παραγώγου στην κινηματική	209
	Ασκήσεις	215

ΜΕΡΟΣ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

7.1	Γενικά	223
7.2	Η έννοια του αορίστου ολοκληρώματος	224
7.2.1	Πρόταση	225
7.2.2	Θεώρημα	225
7.2.3	Ορισμός	226
7.3	Ιδιότητες του αορίστου ολοκληρώματος	227
7.4	Το ορισμένο ολοκλήρωμα συνεχούς συναρτήσεως	228
7.5	Βοηθητικές έννοιες	231
7.6	Άθροισμα Reimann. Γεωμετρική σημασία	231
7.7	Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος	236
7.8	Θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού	237
7.8.1	Θεώρημα	238
7.9	Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος	239

7.9.1	Θεώρημα : (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού	239
7.9.2	Θεώρημα : (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού	241
	Ασκήσεις	244

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

8.1	Θεμελιώδη ολοκληρώματα	247
8.2	Ολοκλήρωση κατά μέρη	249
8.3	Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	250
8.4	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (Παραγοντική)	253
8.5	Αναγωγικοί τύποι	258
	Ασκήσεις	262

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

9.1	Γενικά-Ολοκλήρωση ειδικών μορφών ρητών συναρτήσεων....	265
9.2	Υπολογισμός του ολοκληρώματος : $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	267
9.2.1	Το $Q(x)$ έχει ρίζες απλές πραγματικές	269
9.2.2	Το $Q(x)$ έχει ρίζες πολλαπλές πραγματικές	271
9.2.3	Το $Q(x)$ έχει ρίζες απλές μιγαδικές (φανταστικές)	274
9.2.4	Το $Q(x)$ έχει ρίζες πολλαπλές μιγαδικές (φανταστικές)	277
	Ασκήσεις	279

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

10.1	Ολοκληρώματα που περιέχουν μια από τις μορφές :	
	$\sqrt{\alpha^2 - b^2x^2}, \sqrt{\alpha^2 + b^2x^2}, \sqrt{b^2x^2 - \alpha^2}$	281
10.2	Τα ολοκληρώματα είναι της μορφής :	
	$I_1 = \int \frac{x^v dx}{\sqrt{\alpha x + \beta}}, I_2 = \int x^v \sqrt{\alpha x + \beta} dx$	288
10.3	Ολοκληρώματα της μορφής :	
	$I = R(x, x^{\frac{q_1}{r}}, x^{\frac{q_2}{r}}, \dots, x^{\frac{q_r}{r}}) dx$	289
10.4	Ολοκληρώματα διαφορικών διωνύμων	291
	Ασκήσεις	293

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11**ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

11.1	Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$	295
	11.1.1 Ειδικές αντικαταστάσεις	296
11.2	Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu kx \sigma\upsilon\nu l x dx,$ $\int \eta\mu kx \eta\mu l x dx, \int \sigma\upsilon\nu kx \sigma\upsilon\nu l x dx$	298
11.3	Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \eta\mu^v x \sigma\upsilon\nu^z x dx$	300
11.4	Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \epsilon\varphi^z x dx$ ή $I = \int \frac{dx}{\epsilon\varphi^z x}$	301
	Ασκήσεις	303

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12**ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ**

12.1	Μέθοδος των τραπεζίων	305
12.2	Μέθοδος του Simson	307
	Ασκήσεις	311

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

13.1	Ορισμός	313
	Ασκήσεις	318

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

14.1	Εμβαδά επιπέδων χωρίων	319
	14.1.1 Υπολογισμός εμβαδών σε καρτεσιανές συντεταγμένες	319
	14.1.2 Υπολογισμός εμβαδών όταν η καμπύλη δίνεται παραμετρικά	322
	14.1.3 Υπολογισμός εμβαδών όταν η καμπύλη δίνεται σε πολικές συντεταγμένες	323
14.2	Όγκοι στερεών	331
	14.2.1 Όγκος στερεού με γνωστές κάθετες τομές προς έναν άξονα	331
	14.2.2 Όγκος στερεού εκ περιστροφής	335
14.3	Μήκος τόξου επιπέδου καμπύλης	341
	14.3.1 Μήκος τόξου σε καρτεσιανές συντεταγμένες	341
	14.3.2 Μήκος τόξου όταν η καμπύλη δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις	344
	14.3.3 Μήκος τόξου όταν η καμπύλη αναφέρεται σε πολικές συντεταγμένες	345
14.4	Εμβαδόν επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής	348
	14.4.1 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού, εκ περιστροφής σε καρτεσιανές συντεταγμένες	348
	14.4.2 Εμβαδό επιφάνειας, εκ περιστροφής όταν η καμπύλη	

δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις	351
14.4.3 Εμβαδό επιφάνειας, εκ περιστροφής όταν η καμπύλη δίνεται σε πολικές συντεταγμένες	351
Ασκήσεις	353

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

15.1 Έργο	357
15.1.1 Έργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη	357
15.1.2 Έργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη	357
15.2 Ροπές επιπέδων επιφανειών και ροπές στερεών εκ περιστροφής - κέντρα βάρους	361
15.2.1 Γενικά	361
15.2.2 Ροπές επιπέδων επιφανειών - Κέντρο βάρους αριθμός :	362
15.2.3 Ροπές στερεών εκ περιστροφής - Κέντρο βάρους	365
15.2.4 Θεώρημα (πρώτο του Πάππου)	366
15.3 Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών και ροπές αδρανείας στερεών εκ περιστροφής	372
15.3.1 Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών	372
15.3.2 Ροπές αδρανείας στερεών εκ περιστροφής	374
15.3.3 Ακτίνα ροπής αδρανείας	376
15.4 Ροπή και ροπή αδρανείας υλικού σημείου και συστήματος υλικών σημείων ως προς ευθεία	381
15.5 Κέντρο βάρους μιας επιπέδου καμπύλης και ροπές αδρανείας	382
15.6 Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας μιας επιφάνειας εκ περιστροφής	387
15.6.1 Θεώρημα του Πάππου (δεύτερο)	387

15.7 Πίεση ρευστών	389
15.7.1 Πίεση	389
15.7.2 Δύναμη σε μια επίπεδη επιφάνεια που θεωρείται βυθισμένη σε ένα υγρό	390
Ασκήσεις	394

ΜΕΡΟΣ Γ'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1 ^ο λύσεις	399
Κεφάλαιο 2 ^ο λύσεις	411
Κεφάλαιο 3 ^ο λύσεις	417
Κεφάλαιο 4 ^ο λύσεις	423
Κεφάλαιο 5 ^ο λύσεις	443
Κεφάλαιο 6 ^ο λύσεις	445
Κεφάλαιο 7 ^ο λύσεις	468
Κεφάλαιο 8 ^ο λύσεις	473
Κεφάλαιο 9 ^ο λύσεις	485
Κεφάλαιο 10 ^ο λύσεις	491
Κεφάλαιο 11 ^ο λύσεις	501
Κεφάλαιο 12 ^ο λύσεις	509
Κεφάλαιο 13 ^ο λύσεις	513
Κεφάλαιο 14 ^ο λύσεις	521
Κεφάλαιο 15 ^ο λύσεις	537
Βιβλιογραφία	543