

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Εισαγωγή .....   | 13 |
| 1.2  | Ορισμός και θεωρήματα περιοδικών συναρτήσεων .....               | 14 |
| 1.3  | Ιδιότητες περιοδικών συναρτήσεων .....                           | 15 |
| 1.4  | Ορισμοί και θεωρήματα άρτιων - περιττών συναρτήσεων .....        | 17 |
| 1.5  | Αρμονικές συναρτήσεις .....                                      | 17 |
| 1.6  | Περιοδική επέκταση συνάρτησης .....                              | 20 |
| 1.7  | Τριγωνομετρική σειρά Fourier .....                               | 21 |
| 1.8  | Σειρά Fourier άρτιας - περιττής συνάρτησης .....                 | 26 |
| 1.9  | Σειρά Fourier συνάρτησης περιόδου $2\pi$ .....                   | 28 |
| 1.10 | Σειρά Fourier συνάρτησης άρτιας - περιττής περιόδου $2\pi$ ..... | 28 |
| 1.11 | Αναγωγή διαστήματος $[\alpha, \beta]$ στο $[-\pi, \pi]$ .....    | 30 |
| 1.12 | Άλλαγή περιόδου τ σε περίοδο $2\pi$ .....                        | 32 |
| 1.13 | Σειρές Fourier συνημιτόνων - ημιτόνων .....                      | 32 |
| 1.14 | Παραγώγιση - ολοκλήρωση των σειρών Fourier .....                 | 36 |
| 1.15 | Ισότητα του Parseval .....                                       | 39 |
| 1.16 | Φάσμα συχνοτήτων .....   | 44 |
| 1.17 | Γραφική μέθοδος αρμονικής ανάλυσης .....                         | 47 |
| 1.18 | Μιγαδική - εκθετική μορφή σειράς Fourier .....                   | 51 |
| 1.19 | Ολοκλήρωμα του Fourier .....                                     | 55 |
| 1.20 | Λυμένες ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο .....                           | 62 |
| 1.21 | Ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο .....                                   | 76 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

|  |     |
|--|-----|
| 2.1 Εισαγωγή .....   | 83  |
| <b>I. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE</b>  |     |
| 2.2 Γενικά .....   | 84  |
| 2.3 Υπαρξη μετασχηματισμού Laplace .....   | 85  |
| 2.4 Μετασχηματισμός Laplace βασικών συναρτήσεων .....  | 86  |
| 2.5 Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace .....  | 89  |
| 2.6 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace .....  | 98  |
| 2.7 Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στη λύση διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων με σταθερούς συντελεστές ..... | 103 |
| 2.8 Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στα ηλεκτρικά κυκλώματα .....   | 109 |
| 2.9 Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στα συστήματα μεταφοράς .....   | 115 |
| 2.10 Θεώρημα της συνέλιξης για τους μετασχηματισμούς Laplace .....   | 126 |
| 2.11 Λυμένες ασκήσεις στο μετασχηματισμό Laplace .....   | 129 |
| 2.12 Ασκήσεις στο μετασχηματισμό Laplace .....   | 147 |
| <b>II. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER</b>   |     |
| 2.13 Γενικά .....  | 155 |
| 2.14 Μετασχηματισμός Fourier βασικών συναρτήσεων .....   | 158 |
| 2.15 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier .....   | 161 |
| 2.16 Λυμένα παραδείγματα στο μετασχηματισμό Fourier .....  | 165 |
| 2.17 Θεώρημα Parseval .....  | 169 |
| 2.18 Δίκτυα διεγειρόμενα με ολοκλήρωμα Fourier .....   | 171 |
| 2.19 Ασκήσεις στο μετασχηματισμό Fourier .....   | 174 |
| <b>III. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ <math>\mathcal{Z}</math> (Ζήτα)</b>  |     |
| 2.20 Γενικά .....  | 177 |
| 2.21 Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ακολουθίας .....  | 179 |

---

|   |     |
|---|-----|
| 2.22 Μετασχηματισμός $\mathcal{L}$ ακολουθίας τιμών συνάρτησης .....  | 181 |
| 2.23 Ιδιότητες μετασχηματισμού $\mathcal{L}$ .....  | 183 |
| 2.24 Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}$ .....  | 187 |
| 2.25 Παραδείγματα στο μετασχηματισμό $\mathcal{L}$<br>και στον αντίστροφό του .....                             | 190 |
| 2.26 Εξισώσεις διαφορών .....   | 193 |
| 2.27 Εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathcal{L}$ στα γραμμικά και<br>χρονικά αμετάβλητα διάκριτα συστήματα ..... | 197 |
| 2.28 Σχέση μεταξύ του μετασχηματισμού Laplace και του<br>μετασχηματισμού Ζήτα .....                             | 204 |
| 2.29 Ασκήσεις στο μετασχηματισμό Ζήτα.....  | 205 |
| Πίνακας I βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace ....  | 208 |
| Πίνακας II βασικών και μη αρχικών συναρτήσεων και<br>μετασχηματισμών κατά Laplace .....                         | 209 |
| Πίνακας III βασικών ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier ....  | 212 |
| Πίνακας IV αρχικών συναρτήσεων και μετασχηματισμών<br>κατά Fourier .....  | 213 |
| Πίνακας V βασικών ιδιοτήτων μετασχηματισμού $\mathcal{L}(Ζήτα)$ ....  | 214 |
| Πίνακας VI αρχικών συναρτήσεων και μετασχηματισμών<br>κατά Ζήτα .....   | 215 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

#### I. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

|   |     |
|---|-----|
| 3.1 Γενικά .....  | 217 |
| 3.2 Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής,<br>ορίου, συνέχειας, παραγώγισης και διαφόρισης ..... | 218 |

#### II. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

|  |     |
|--|-----|
| 3.3 Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών<br>ορίου, συνέχειας, παραγώγισης και διαφόρισης ..... | 225 |
| 3.4 Κατευθυνόμενη παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης .....  | 231 |

---

**III. ΤΕΛΕΣΤΗΣ HAMILTON Ή ΑΝΑΔΕΛΤΑ ΚΑΙ Ο ΤΕΛΕΣΤΗΣ LAPLACE**

- 3.5 Ορισμός και ιδιότητες τελεστών Hamilton και Laplace ..... 235

**IV. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ**

- 3.6 Εφαπτομένη καμπύλης ..... 241  
 3.7 Κάθετο επίπεδο καμπύλης ..... 243  
 3.8 Εγγύτατο επίπεδο καμπύλης ..... 244  
 3.9 Τοίεδρο του Frenet ..... 245  
 3.10 Καμπυλότητα - στρέψη καμπύλης ..... 247  
 3.11 Τύποι του Frenet ..... 251  
 3.12 Παραμετρικά δίκτυα επιφάνειας ..... 251  
 3.13 Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας ..... 252  
 3.14 Η κάθετη στην επιφάνεια ..... 255  
 3.15 Συμπληρώσεις ..... 256  
 3.16 Λυμένες ασκήσεις στο 3ο κεφάλαιο ..... 258  
 3.17 Ασκήσεις στο 3ο κεφάλαιο ..... 267

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**
**I. ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ**

- 4.1 Γενικά ..... 273  
 4.2 Μεγέθη σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ..... 275  
 4.3 Ασκήσεις στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ..... 292

**II. ΠΕΔΙΑ**

- 4.4 Γενικά ..... 293  
 4.5 Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία ..... 293  
 4.6 Παράγωγο διανυσματικό πεδίο ..... 298  
 4.7 Κλίση (gradient) βαθμωτού πεδίου ..... 303  
 4.8 Απόκλιση (divergence) διανυσματικού πεδίου ..... 306

---

|  |     |
|--|-----|
| 4.9 Περιστροφή (rotation) ή στροβιλισμός (curl) διανυσματικού πεδίου ..... | 309 |
| 4.10 Λυμένες ασκήσεις στα πεδία .....                                      | 315 |
| 4.11 Ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο .....  | 320 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### **I. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ**

|  |     |
|--|-----|
| 5.1 Αόριστο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής .....  | 325 |
| 5.2 Ορισμένο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής ..... | 326 |
| 5.3 Είδη καμπύλων - τόπων .....  | 328 |

### **II. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

|  |     |
|--|-----|
| 5.4 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους .....                                       | 331 |
| 5.5 Εφαρμογές του επικαμπύλου ολοκληρώματος 1ου είδους στη Φυσική .....  | 335 |
| 5.6 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους .....                                  | 339 |
| 5.7 Εφαρμογές επικαμπύλου ολοκληρώματος 2ου είδους .....   | 344 |
| 5.8 Τύπος του Green .....  | 347 |
| 5.9 Συνθήκες ανεξαρτησίας του επικαμπύλου ολοκληρώματος 2ου είδους από την καμπύλη ολοκλήρωσης και άλλα βασικά θεωρήματα ..... | 349 |
| 5.10 Εφαρμογές και ασκήσεις στα επικαμπύλια ολοκληρώματα ...   | 356 |

### **III. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

|   |     |
|---|-----|
| 5.11 Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης ή επιφανειακό ολοκλήρωμα 1ου είδους ..... | 364 |
| 5.12 Εφαρμογή του επιφανειακού ολοκληρώματος στη Φυσική ....                              | 372 |

---

|   |     |
|---|-----|
| 5.13 Επιφανειακό ολοκλήρωμα 2ου είδους .....                          | 377 |
| 5.14 Υπολογισμός του όγκου στερεού με επιφανειακό<br>ολοκλήρωμα ..... | 382 |
| 5.15 Τύπος του Gauss - Ostrogradsky .....                             | 385 |
| 5.16 Τύπος του Stokes .....   | 391 |
| 5.17 Λυμένες ασκήσεις στο 5ο κεφάλαιο .....                           | 396 |
| 5.18 Ασκήσεις στο 5ο κεφάλαιο .....                                   | 406 |

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6**

### **I. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ**

|  |     |
|--|-----|
| 6.1 Γενικά .....   | 415 |
| 6.2 Άλλες μιօρφές και ιδιότητες της συνάρτησης γάμμα ..... | 418 |
| 6.3 Γραφική παράσταση της συνάρτησης γάμμα .....           | 424 |

### **II. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΒΗΤΑ**

|  |     |
|--|-----|
| 6.4 Γενικά .....   | 425 |
| 6.5 Λυμένες ασκήσεις στις συναρτήσεις βήτα και γάμμα ..... | 427 |
| 6.6 Η διαφορική εξίσωση Bessel .....                       | 433 |
| 6.7 Σειρές Jacobi .....                                    | 445 |
| 6.8 Ασκήσεις στο 6ο κεφάλαιο .....                         | 449 |
| Πίνακας ολοκληρωμάτων .....                                | 453 |
| Ευρετήριο εννοιών .....                                    | 463 |
| Βιβλιογραφία .....   | 469 |