

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1.1 Ορισμός ορίζουσας	19
1.2 Ελάσσονες ορίζουσες	21
1.3 Ανάπτυγμα ορίζουσας	22
1.4 Ιδιότητες των οριζουσών	27
1.5 Συμπληρωματικά σχετικά με τις ορίζουσες	36
1.6 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων nxn	37
1.6.1 Μέθοδος Crammer	37
1.6.2 Ομογενή γραμμικά συστήματα	40
Ασκήσεις	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΠΙΝΑΚΕΣ ή ΜΗΤΡΕΣ (MATRIX)

2.1 Η έννοια του πίνακα	47
2.2 Ισότητα πινάκων - ιδιότητες	49
2.3 Πράξεις πινάκων	51

2.3.1	Πρόσθεση πινάκων	51
2.3.2	Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα	53
2.3.3	Πολλαπλασιασμός πινάκων	53
2.4	Μοναδιαίος πίνακας - Διαγώνιος πίνακας - Τριγωνικός πίνακας	59
2.5	Ανάστροφος πίνακας - είδη πινάκων	63
2.6	Αντίστροφοι πίνακες - Ιδιότητες	68
2.7	Βαθμός ή τάξη πίνακα	73
2.8	Υπολογισμός του πίνακα A^{-1}	83
2.9	Γραμμικά συστήματα	90
2.9.1	Γραμμική εξίσωση	90
2.9.2	Γραμμικό σύστημα	91
2.9.3	Στοιχειώδεις πράξεις	92
2.10	Αλγόριθμος απαλοιφής του Gauss	93
2.11	Μέθοδος με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα	94
2.12	Χαρακτηριστική εξίσωση τετραγωνικού πίνακα, χαρακτηριστικές ρίζες (Ιδιοτιμές)	99
2.13	Ιδιοδιανύσματα ή χαρακτηριστικά διανύσματα	101
2.14	Δύναμη πίνακα	106
2.15	Όμοιοι πίνακες	108
	Ασκήσεις	113

ΜΕΡΟΣ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1	Μεγέθη	127
3.2	Διανύσματα	128

3.3 Διαδοχικά διανύσματα - Διανυσματικές ακτίνες - Προβολή διανύσματος επί ευθεία ή επίπεδο	130
3.4 Στοιχειώδεις πράξεις διανυσμάτων	132
3.4.1 Άθροισμα	132
3.4.2 Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων	133
3.4.3 Γινόμενο	134
3.4.4 Συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων	136
3.4.5 Διαφορά	137
3.5 Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος	139
3.5.1 Άξονας	139
3.5.2 Αλγεβρική τιμή	140
3.5.3 Θεώρημα του Chasles	141
3.5.4 Συντεταγμένες διανύσματος στο επίπεδο.....	142
3.5.5 Συντεταγμένες διανύσματος στο χώρο	145
3.6 Απόσταση δύο σημείων	148
3.7 Λόγος συγγραμμικών διανυσμάτων	152
3.8 Απλός ή μερικός λόγος	153
3.9 Διπλός λόγος τεσσάρων σημείων	154
3.10 Συντεταγμένες σημείου που χωρίζει διάνυσμα σε λόγο λ	154
3.11 Γωνία δύο ημιευθειών	160
3.12 Γωνία διανυσμάτων	162
3.13 Συντελεστής διευθύνσεως διανύσματος	163
3.14 Συνημίτονα κατευθύνσεως διανύσματος	165
3.15 Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων (Βαθμωτό γινόμενο)	167
3.15.1 Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου	169
3.15.2 Αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου	170
3.16 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	178
3.16.1 Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου	180
3.16.2 Αναλυτική έκφραση του εξωτερικού γινομένου	181
3.17 Μικτό γινόμενο διανύσματος	188
3.17.1 Αναλυτική έκφραση του μικτού γινομένου	188

3.17.2 Γεωμετρική ερμηνεία του μικτού γινομένου	189
3.17.3 Ιδιότητες του μικτού γινομένου	191
Ασκήσεις	200

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

4.1 Γενικά	207
4.2 Σύστημα πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο	208
4.3 Σφαιρικές συντεταγμένες	209
4.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες	210
4.5 Αλλαγή αξόνων καρτεσιανών συντεταγμένων	213
4.5.1 Παράλληλη μετατόπιση αξόνων	214
4.5.2 Παράλληλη μεταφορά και στροφή των αξόνων	217
Ασκήσεις	220

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

5.1 Γενικά	223
5.2 Η ευθεία	224
5.2.1 Διανυσματική εξίσωση ευθείας	224
5.2.2 Διανυσματική εξίσωση ευθείας από δύο σημεία	225
5.2.3 Παραμετρική εξίσωση ευθείας	227
5.2.4 Αναλυτική εξίσωση ευθείας	228
5.2.5 Γενική μορφή εξισώσεως ευθείας	228
5.2.6 Διερεύνηση της εξισώσεως ευθείας	230
5.2.7 Συντελεστής διεύθυνσεως ευθείας	232
5.2.8 Ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας	233
5.2.9 Γωνία ευθειών	234

5.2.10	Σχετική θέση δύο ευθειών του αυτού επιπέδου	236
5.2.11	Συνθήκη για να διέρχονται τρεις ευθείες από το αυτό σημείο	237
5.2.12	Επίπεδο δέσμης ευθειών	238
5.2.13	Προσανατολισμός επιπέδου ως προς ευθεία ή σύνολο λύσεων γραμμικής ανισότητας ως προς x, y	240
5.2.14	Απόσταση σημείου από ευθεία	242
5.2.15	Εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες	244
5.3	Κωνικές τομές	265
5.4	Κύκλος	267
5.4.1	Εξίσωση κύκλου	267
5.4.2	Εξίσωση κύκλου που περνά από τρία σημεία	271
5.4.3	Σχετική θέση κύκλου και ευθείας	272
5.4.4	Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου	272
5.5	Η έλλειψη	277
5.5.1	Εξίσωση της ελλείψεως	278
5.5.2	Στοιχεία της ελλείψεως	281
5.5.3	Παραμετρικές εξισώσεις ελλείψεως	283
5.5.4	Πολική εξίσωση ελλείψεως	284
5.5.5	Εξίσωση εφαπτομένης ελλείψεως	285
5.6	Η υπερβολή	292
5.6.1	Εξίσωση της υπερβολής	292
5.6.2	Στοιχεία της υπερβολής	295
5.6.3	Εξίσωση υπερβολής σε παραμετρική μορφή	296
5.6.4	Εξίσωση εφαπτομένης και καθέτου σε σημείο υπερβολής	297
5.7	Παραβολή	306
5.7.1	Εξίσωση της παραβολής	307
5.7.2	Παραμετρικές εξισώσεις παραβολής	309
5.7.3	Εξίσωση εφαπτομένης και καθέτου παραβολής	310
5.8	Εξίσωση κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες	313
5.8.1	Εξίσωση κωνικών γενικά	313

5.8.2	Πολικά διαγράμματα	316
5.8.3	Ο Λημνίσκος του Bernoulli	316
5.8.4	Καρδιοειδές διάγραμμα	317
5.9	Καμπύλες δευτέρου βαθμού	318
	Ασκήσεις	323

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

6.1	Γενικά	335
6.2	Η ευθεία στο χώρο	337
6.2.1	Διανυσματική εξίσωση ευθείας	337
6.2.2	Παραμετρική εξίσωση ευθείας	338
6.2.3	Αναλυτική εξίσωση ευθείας	339
6.3	Επίπεδο	339
6.3.1	Διανυσματική και παραμετρική εξίσωση επιπέδου	339
6.3.2	Αναλυτική εξίσωση του επιπέδου	343
6.3.3	Γενική μορφή εξισώσεως επιπέδου	344
6.3.4	Διερεύνηση της $Ax + By + Cz + D = 0$	345
6.3.5	Σχετική θέση δύο επιπέδων	347
6.3.6	Προσανατολισμός του χώρου ως προς επίπεδο	348
6.3.7	Απόσταση σημείου από επίπεδο-γωνία δύο επιπέδων	348
6.3.8	Αξονική και κεντρική δέσμη επιπέδων	350
6.4	Επιφάνειες δευτέρου βαθμού	354
6.4.1	Κυλινδρικές επιφάνειες με γενέτηρα παράλληλη προς έναν άξονα συντεταμένων	354
6.4.2	Σφαίρα	356
6.4.3	Ελλειψοειδές	357
6.4.4	Υπερβολοειδές	359
6.4.5	Μονόχωνο υπερβολοειδές	360

6.4.6 Δίχωνο υπερβολοειδές	362
6.4.7 Παραβολοειδή	365
6.4.8 Ελλειπτικό παραβολοειδές	365
6.4.9 Υπερβολικό παραβολοειδές	366
6.4.10 Κώνος	367
Ασκήσεις	369

ΜΕΡΟΣ Γ'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥΣ (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥΣ) ΧΩΡΟΥΣ

7.1 Γενικά	373
7.2 Ορισμός γραμμικού χώρου	374
7.3 Γραμμικοί (διανυσματικοί) υπόχωροι	376
7.3.1 Ορισμός	377
7.3.2 Πρόταση	377
7.4 Ιδιότητες στους γραμμικούς χώρους	378
7.5 Γραμμική εξάρτηση	380
7.5.1 Ορισμός	380
7.5.2 Ορισμός	380
7.5.3 Ορισμός	381
7.5.4 Ιδιότητες	384
7.6 Βάση και διάσταση γραμμικού χώρου	388
7.6.1 Ορισμός	388
7.6.2 Πρόταση	388
7.6.3 Ορισμός	390
7.6.4 Πρόταση	390

7.7	Ενκλείδιοι γραμμικοί χώροι	393
7.7.1	Ορισμός	393
7.7.2	Ορισμός	394
7.7.3	Ορισμός	394
7.7.4	Ορισμός	395
7.7.5	Ανισότητες Cauchy - Schwartz και τριγωνική	396
7.7.6	Γωνία δύο διανυσμάτων	397
	Ασκήσεις	401

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

8.1	Σύνολο των πραγματικών αριθμών	405
8.1.1	Υποσύνολα του $\mathbb{R}$	406
8.1.2	Γραμμικό διάγραμμα των συνόλων	407
8.1.3	Διαστήματα πραγματικών αριθμών	408
8.1.4	Περιοχή πραγματικού αριθμού x_0 ή σημείου x_0	412
8.2	Σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$	412
8.2.1	Ορισμός και άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών	413
8.2.2	Ιδιότητες της ισότητας και πράξεις του $\mathbb{C}$	416
8.2.3	Συμμετρικά στοιχεία στις πράξεις	417
8.2.4	Αφαίρεση και διαίρεση μιγαδικών	419
8.2.5	Η φανταστική μονάδα	419
8.2.6	Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί - ιδιότητες	424
8.2.7	Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού αριθμού	429
8.2.8	Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος και της διαφοράς μιγαδικών αριθμών	432
8.2.9	Μέτρο ή απόλυτος τιμή μιγαδικού αριθμού	434
8.2.10	Τριγωνομετρική ή πολική μορφή μιγαδικού αριθμού	442
8.2.11	Θεωρήματα των μιγαδικών αριθμών	446

8.2.12 Τύπος του De Moivre	448
8.2.13 Νιοστές ρίζες μιγάδα	450
8.2.14 Νιοστές ρίζες της μονάδας	451
8.2.15 Εκθετική μορφή μιγάδα	455
8.2.16 Νεπέριος λογάριθμος μιγαδικού αριθμού	458
Ασκήσεις	464

ΜΕΡΟΣ Δ'

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1 ^ο λύσεις	467
Κεφάλαιο 2 ^ο λύσεις	479
Κεφάλαιο 3 ^ο λύσεις	509
Κεφάλαιο 4 ^ο λύσεις	527
Κεφάλαιο 5 ^ο λύσεις	533
Κεφάλαιο 6 ^ο λύσεις	577
Κεφάλαιο 7 ^ο λύσεις	581
Κεφάλαιο 8 ^ο λύσεις	589