

# Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
<b>1 Εξισώσεις πρώτης τάξης</b>	<b>1</b>
1.1 Ορισμοί	1
1.2 Εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών	3
1.3 Γραμμικές εξισώσεις	8
1.4 Περιοδικές εξισώσεις	12
1.5 Εξισώσεις Bernoulli και Riccati	21
1.5.1 Εξίσωση του Bernoulli	21
1.5.2 Εξίσωση του Riccati	22
1.6 Εξισώσεις ομογενείς και αναγόμενες σε ομογενείς	25
1.6.1 Ομογενείς εξισώσεις	26
1.6.2 Εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς	29
1.7 Εξισώσεις δεύτερης τάξης	30
1.8 Ακριβείς εξισώσεις	40
1.9 Συστήματα	54
1.9.1 Το σύστημα Lotka-Volterra	54
1.9.2 Χαμιλτονιανά συστήματα	57
1.10 Οι νόμοι του Kepler	61
1.11 Ασκήσεις	68
<b>2 Τα βασικά θεωρήματα</b>	<b>83</b>
2.1 Η άλλη αντίληψη	83
2.2 Μέθοδοι Picard και Euler	84
2.2.1 Προσεγγίσεις Picard	85
2.2.2 Προσεγγίσεις Euler	87
2.2.3 Σύγκλιση προσεγγίσεων Picard - Θεώρημα τοπικής ύπαρξης Picard-Lindelöf	90
2.3 Ανισότητα του Gronwall	100
2.4 Συνεχής εξάρτηση	104
2.5 Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης	106
2.6 Ασκήσεις	113

<b>3</b>	<b>Ποιοτική θεωρία</b>	<b>117</b>
3.1	Πληθυσμιακά μοντέλα . . . . .	117
3.1.1	Το μοντέλο του Malthus . . . . .	117
3.1.2	Το μοντέλο Verhulst ή λογιστικό μοντέλο . . . . .	118
3.1.3	Ποιοτική ανάλυση του λογιστικού μοντέλου . . . . .	119
3.2	Διαγράμματα φάσης . . . . .	121
3.3	Γραμμικοποίηση . . . . .	126
3.4	Δυναμικά συστήματα . . . . .	129
3.5	Το διανυσματικό πεδίο . . . . .	131
3.6	Διακλαδώσεις . . . . .	135
3.7	Ασκήσεις . . . . .	150
<b>4</b>	<b>Γραμμικές με Σταθερούς Συντελεστές</b>	<b>153</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	153
4.2	Η ομογενής εξίσωση τάξης 2 . . . . .	154
4.2.1	Πρόβλημα αρχικών τιμών . . . . .	155
4.2.2	Γενική λύση . . . . .	159
4.3	Γραμμική ανεξαρτησία . . . . .	161
4.4	Η μη ομογενής εξίσωση τάξης 2 . . . . .	166
4.5	Μέθοδος Lagrange . . . . .	166
4.6	Η ομογενής εξίσωση τάξης $n$ . . . . .	169
4.6.1	Πρόβλημα αρχικών τιμών . . . . .	172
4.6.2	Γενική λύση . . . . .	176
4.6.3	Η εξίσωση του Euler . . . . .	178
4.7	Η μη ομογενής εξίσωση τάξης $n$ . . . . .	182
4.8	Μέθοδος Απροσδιόριστων Συντελεστών . . . . .	186
4.9	Μηχανικές Ταλαντώσεις . . . . .	195
4.9.1	Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή . . . . .	196
4.9.2	Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με τριβή . . . . .	197
4.9.3	Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση . . . . .	199
4.10	Ασκήσεις . . . . .	201
<b>5</b>	<b>Μέθοδος δυναμοσειρών</b>	<b>207</b>
5.1	Δυναμοσειρές . . . . .	207
5.2	Ομαλά σημεία . . . . .	209
5.3	Εξίσωση Legendre . . . . .	216
5.4	Κανονικό ιδιάζον σημείο . . . . .	220
5.5	Εξίσωση Bessel . . . . .	237
5.6	Ασκήσεις . . . . .	242
<b>6</b>	<b>Γραμμικά συστήματα</b>	<b>251</b>
6.1	Ορισμοί, Ύπαρξη-Μονοσήμαντο . . . . .	251
6.2	Ομογενείς γραμμικές εξισώσεις . . . . .	259
6.3	Ο τύπος της μεταβολής των παραμέτρων . . . . .	271
6.3.1	Η γενική περίπτωση . . . . .	271

6.3.2	Η εκθετική συνάρτηση $e^{At}$ . . . . .	273
6.3.3	Το συζυγές πρόβλημα, εφαρμογές στα περιοδικά συστήματα . . . . .	277
6.4	Συναρτήσεις Green . . . . .	282
6.5	Γραμμικές εξισώσεις τάξης $n$ . . . . .	286
6.5.1	Υποβιβασμός τάξης . . . . .	291
6.6	Σταθεροί συντελεστές I: Πίνακες διαγωνοποιήσιμοι . . . . .	294
6.7	Σταθεροί συντελεστές II: Πίνακες μη απλής δομής . . . . .	313
6.7.1	Γενικός τρόπος λύσης ομογενούς συστήματος . . . . .	325
6.8	Περιοδικά γραμμικά συστήματα . . . . .	333
6.9	Ασκήσεις . . . . .	346
<b>7</b>	<b>Εξισώσεις Διαφορών</b> . . . . .	<b>359</b>
7.1	Γραμμικά συστήματα . . . . .	359
7.2	Γραμμική εξίσωση διαφορών τάξης $n$ . . . . .	371
7.3	Διακριτοποίηση . . . . .	372
7.4	Ευστάθεια διακριτοποιημένου συστήματος . . . . .	374
7.5	Μη αυτόνομα συστήματα διακριτού χρόνου . . . . .	375
7.6	Ασκήσεις . . . . .	383
<b>8</b>	<b>Μετασχηματισμός Laplace</b> . . . . .	<b>385</b>
8.1	Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί . . . . .	385
8.2	Παρατηρήσεις στο Μετασχηματισμό Laplace . . . . .	390
8.3	Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace . . . . .	394
8.4	Ασυνεχείς Συναρτήσεις . . . . .	407
8.5	Συναρτήσεις Όθησης και Δέλτα . . . . .	416
8.6	Συνελίξεις . . . . .	421
8.7	Ποιοτική θεωρία του μετασχηματισμού Laplace . . . . .	426
8.8	Λύση συστημάτων με μετασχηματισμό Laplace . . . . .	431
8.9	Ασκήσεις . . . . .	434
<b>9</b>	<b>Αρχή Μεγίστου και Θεωρία Sturm</b> . . . . .	<b>437</b>
9.1	Η αρχή του μεγίστου . . . . .	438
9.2	Θεωρήματα Sturm . . . . .	441
9.3	Ο μετασχηματισμός του Prüffer . . . . .	448
9.4	Πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville . . . . .	454
9.5	Ασκήσεις . . . . .	466
<b>10</b>	<b>Το Επίπεδο Φάσης</b> . . . . .	<b>471</b>
10.1	Αυτόνομα Γραμμικά Συστήματα . . . . .	471
10.1.1	Το επίπεδο φάσης. Ταξινόμηση σημείων ισορροπίας . . . . .	471
10.1.2	Περίπτωση 1. Πραγματικές διακεχωμένες ιδιοτιμές . . . . .	472
10.1.3	Περίπτωση 2. Μιγαδικές ιδιοτιμές . . . . .	477
10.1.4	Περίπτωση 3. Ίσες ιδιοτιμές (Νόθος κόμβος) . . . . .	483
10.1.5	Περίπτωση 4. Μηδενική ιδιοτιμή . . . . .	488
10.2	Καμπύλες στάθμης – Η εξίσωση του Νεύτωνα . . . . .	498

10.2.1 Το Μηχανικό ανάλογο του σφαιριδίου . . . . .	500
10.2.2 Η Αυστηρή αιτιολόγηση – Το Λήμμα του Morse . . . . .	503
10.2.3 Μη κρίσιμες καμπύλες στάθμης – Περιοδικές τροχιές . . . . .	509
10.2.4 Κρίσιμες Καμπύλες Στάθμης – Ομοκλινείς και Ετεροκλινείς Τρο- χιές . . . . .	514
10.3 Γενικά συστήματα στο επίπεδο . . . . .	519
10.4 Θεωρήματα ύπαρξης – μονοσήμαντου . . . . .	524
10.5 Η αρχή της γραμμικοποίησης . . . . .	528
10.6 Συστήματα κλίσης . . . . .	541
10.7 Συστήματα κλίσης και Χαμιλτονιανά . . . . .	546
10.8 Η δεύτερη μέθοδος του Lyapounov . . . . .	547
10.9 Ευσταθείς – ασταθείς πολλαπλότητες . . . . .	562
10.10 Ασκήσεις . . . . .	578
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>589</b>
<b>Ευρετήριο</b>	<b>593</b>